دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

تحلیل سازه ۱

استاد :

جناب آقای مهندس طاحونی

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

حمید کاظم

«تحلیل سازه»

«جناب آقای مهندس طاحونی»

ام سیویل

«بسم الله الرحمن الرحیم»

فهرست مطالب:

۱) معرفی و تشخیص سازه‌ها
۲) نیروهای داخلی و رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی
> میان ترم اول — خیلی خوب بیشن

۳) خرپاها
۴) خطوط تأثیر
> میان ترم دوم — خواب می‌کشد

۵) تغییر شکل سازه‌ها
۶) تحلیل سازه‌های نامعین
> پایان ترم — متوسط

امتیازات:

۱) حل تمرین و کلاس حل تمرین — استاد حل تمرین: مهندس اصفهانی
۲) امتحان میان ترم اول
۳) امتحان میان ترم دوم
۴) امتحان پایان ترم

توجه: در هر ترم امتحانی به ترتیب بودن و تیزی در گره ۵ نمره از ۱۰۰ نمره را دارا می‌باشد

مآخذ:

۱) در زمینه کتب انگلیسی، کتاب‌هایی با عناوین زیر مفید هستند:

1) Theory of structures 2) Structural analysis 3) Analysis of structures
4) Norris & Wilbur
5) Hillberg Burg (کتاب جدید است)

مخصوص کتب:

۲) جزوه کلاسی
۳) کتاب تحلیل سازه‌ها (اسلام آبادی – طاحونی)

← مباحث مربوط در امتحانات برای امتحان بعدی حذف خواهد شد.

کلیات، تشخیص سازه‌ها

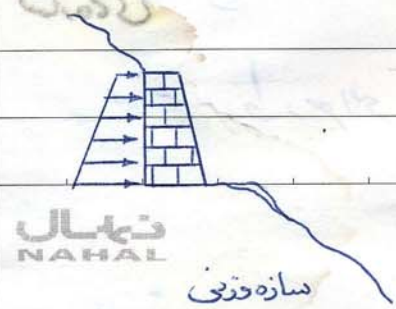
تعریف سازه: عضو یا مجموعه‌ای از اعضا می‌باشد که برای تحمل یا انتقال نیرو به کار می‌رود. کلمه فارسی بسیار خوبی است که معادل structure به کار برده می‌شود.

طبقه بندی سازه‌ها: سازه‌ها را می‌توان با بینش‌های مختلفی طبقه بندی کرد. ما دنبال طبقه بندی هندسی یا آموزشی هستیم. در این درس سازه‌ها را به شکل زیر طبقه بندی می‌نماییم.

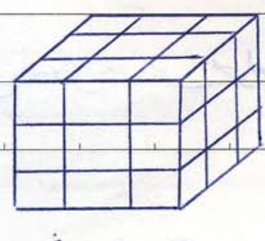
۱) سازه‌های وزنی (gravity structures): سازه‌هایی هستند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بار قائم وزن آن‌هاست.

۲) سازه‌های قاب بندی شده (framed structures): سازه‌های قاب بندی شده مجموعه‌ای از تیرها، ستون‌ها، اعضای محوری، خمشی و غیره هستند که تشکیل حجم مشخصی می‌دهند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بارهای خارجی نه تنها وزن بلکه در درجه اول هندسه آن‌هاست. یعنی با دادن هندسه مناسب به مجموعه پایداری آن‌ها افزایش می‌یابد. اکثر ذهنیت ما از سازه، سازه‌های قاب بندی شده است. ساختمان‌های مسکونی، اداری، پل‌های پادویی، علائم، سازه‌های هوایی و ... در رده سازه‌های قاب بندی شده‌اند. تمرکز اصلی تحلیل سازه‌های ۱ و ۲ سازه‌های قاب بندی شده است.

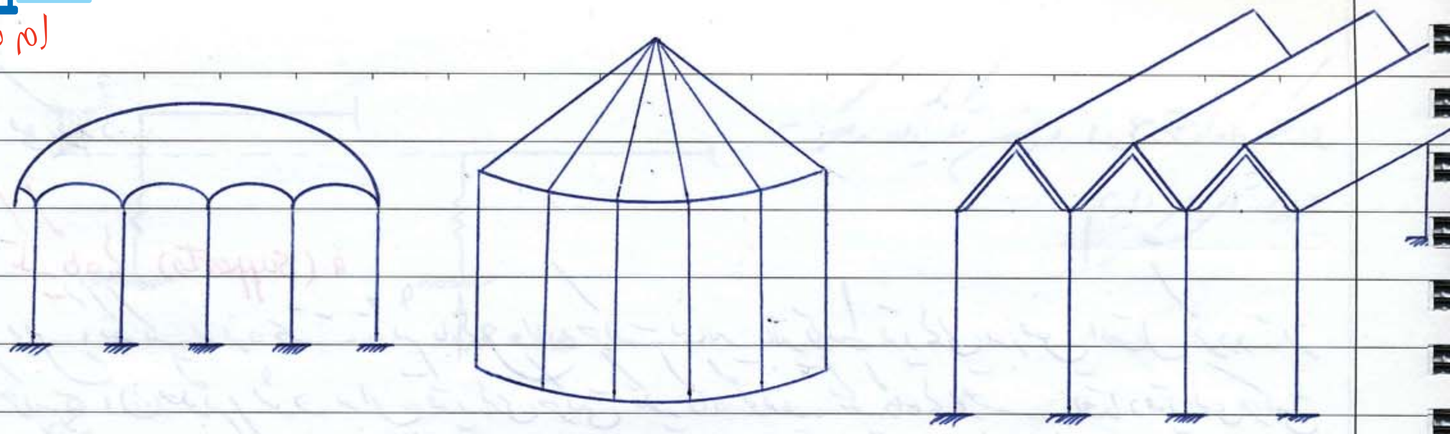
۳) سازه‌های پوسته‌ای (shell structures): عامل غالب (در پایداری سازه‌های پوسته‌ای) هندسه آن‌ها می‌باشد. وجه تمایزی که این سازه‌ها با سازه‌های قاب بندی شده دارند این است که سازه‌های پوسته‌ای معمولاً از ورق و یا محیط‌های پیوسته‌ای هستند که به آن هندسه خاصی داده شده است. لذا، پوشش‌های زین اسبی، ورق‌های تا شده، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی از انواع سازه‌های پوسته‌ای هستند. تحلیل این گونه سازه‌ها که دارای کاربردهای صنعتی و یا معماری هستند، معمولاً در دروس تحلیل صفحه‌ها و پوسته‌ها مورد توجه قرار می‌گیرند.



سازه وزنی



سازه قاب بندی شده



سازه‌های پوسته‌ای

علم تحلیل سازه: علمی است که در آن رفتار سازه از نقطه‌ای که بار به آن اعمال می‌گردد تا لحظه‌ای که بار به تکیه‌گاه‌ها منتقل می‌گردد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

هدف از تحلیل سازه: وقتی که سازه‌ای را مورد تحلیل قرار می‌دهیم به دنبال اهداف زیر می‌باشیم.

۱) بررسی پایداری، ناپایداری، معین و نامعین

۲) تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی

۳) تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار آن‌ها

۴) محاسبهٔ تغییر شکل سازه

سازه‌های فضایی (سه بعدی) و سازه‌های صفحه‌ای (دو بعدی):

سازه‌های فضایی: همه سازه‌ها سه بعدی هستند. یعنی حجمی از فضا را اشغال کرده و در اختیار بهره‌بردار قرار می‌دهند. دسته بسیار بزرگی از سازه‌های سه بعدی از نقطه نظر تحلیل قابل تبدیل به مجموعه‌ای از سازه‌های دو بعدی هستند، یعنی می‌توان آن‌ها را با توجه به اطلاعات مربوط به سازه‌های دو بعدی تحلیل نمود. دسته دیگر از سازه‌های فضایی وجود دارند که رفتار آن‌ها قابل تجزیه به رفتار دو بعدی نیست و حتماً باید سه بعدی بررسی شود. به این دسته سازه‌ها، سازه‌های فضاکار گویند. پوسته‌ها دسته بسیار مهمی از سازه‌های فضاکار هستند.

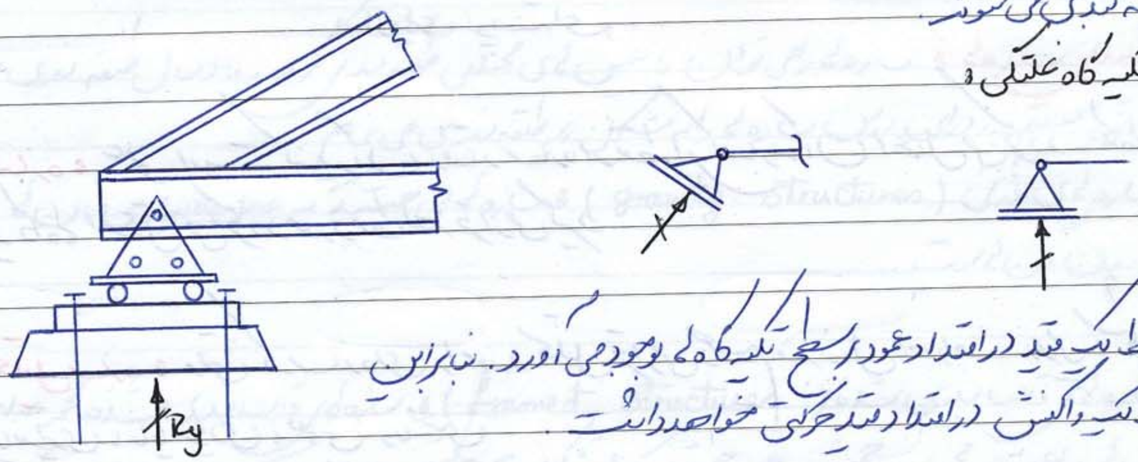
سازه‌های صفحه‌ای: سازه‌هایی می‌باشند که در آن سازه و بارهای وارد بر آن همگی در یک صفحه قرار دارند. درس تحلیل سازه‌های ۱ اختصاص به سازه‌های قاب‌بندی شده صفحه‌ای دارد. تجربه نشان می‌دهد که اگر سازه‌های فضایی قابل تحلیل به صورت دو بعدی می‌باشند. وجود بعد سوم در سازه‌های فضایی اصول و روش‌های کار را تغییر نمی‌دهد و فقط به علت وجود بعد سوم عملیات قدری پرحجم و پیچیده

می گردد.

تکیه گاه‌ها (Supports):

برای اینکه یک سازه تحت تاثیر بارهای وارده حرکت ننماید باید توسط قیدهایی به زمین اتصال گردد تا از حرکت آن جلوگیری شود. به این قیدهای حرکتی تکیه گاه گویند. تکیه گاه‌ها برحسب تعداد قیدهای حرکتی طبقه بندی می شوند.

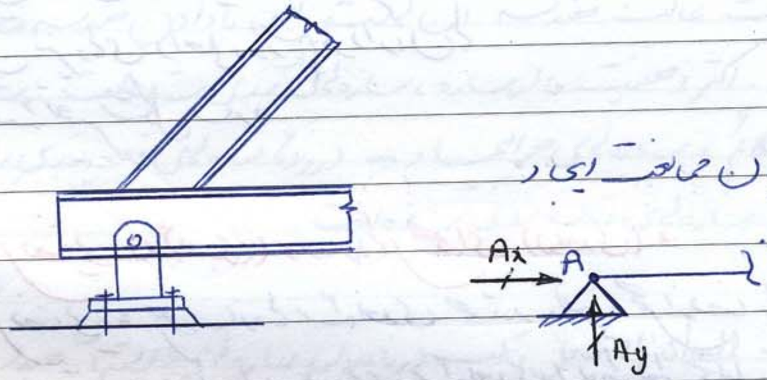
۱) تکیه گاه غلتکی:



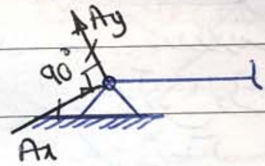
فقط یک قید در امتداد عمود بر سطح تکیه گاه‌ها بوجود می آورد. بنابراین فقط یک واکنش در امتداد قید حرکتی خواهد داشت.

۲) تکیه گاه مفصلی:

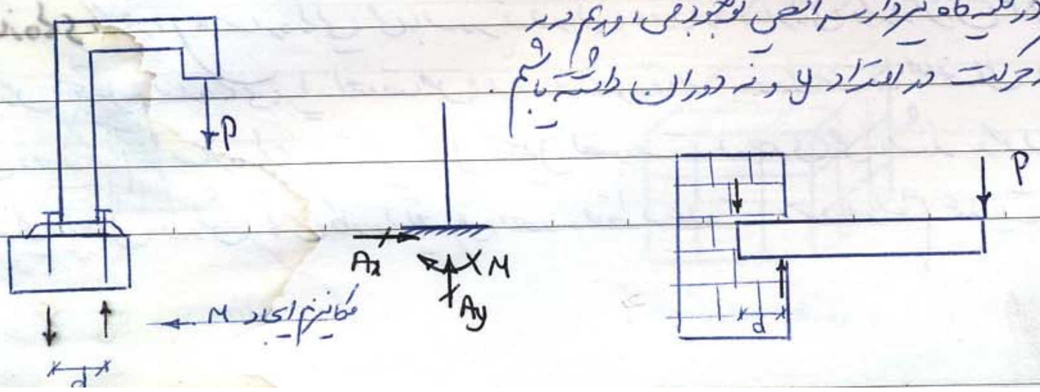
* هر تکیه گاهی در هر امتدادی که در برابر آن مقاومت ایجاد کند باعث ایجاد واکنش می شود.



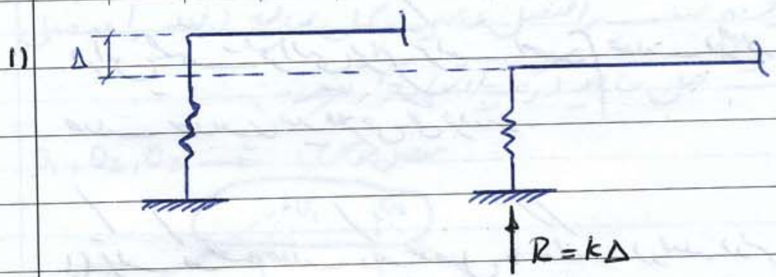
در تکیه گاه مفصلی واکنش‌های Ax و Ay گرچه باید بر هم عمود باشند لیکن جهت عمومی آن‌ها می تواند طبق سهولت حل مسئله در نظر گرفته شود.

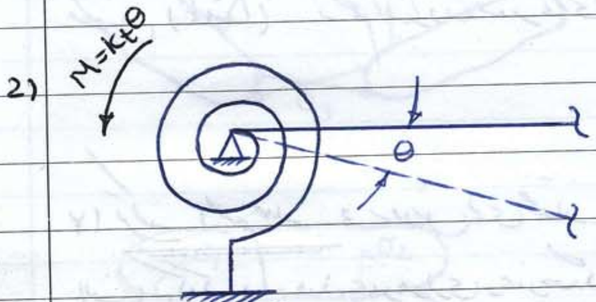


۳) تکیه گاه گیردار: در تکیه گاه گیردار شرایطی بوجود می آوریم نه حرکت در امتداد x و نه حرکت در امتداد y و نه دوران داشته باشیم.

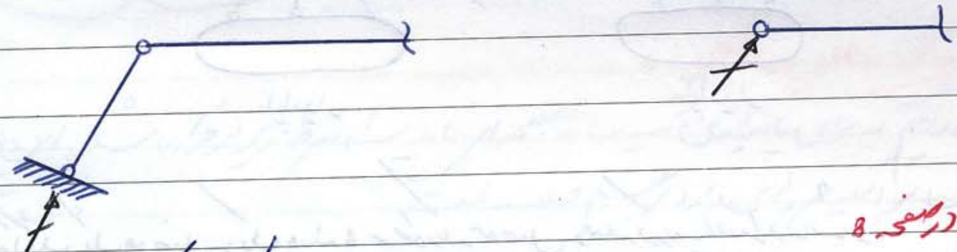


۴) تکیه‌گاه ارتجاعی: در این تکیه‌گاه ما حرکت در راستای فنر داریم.





۵) تکیه‌گاه رابط یا میله‌ای (Link): یک عضو دو سر مفصل است که می‌تواند در امتداد محورش تولید واکنش کند.

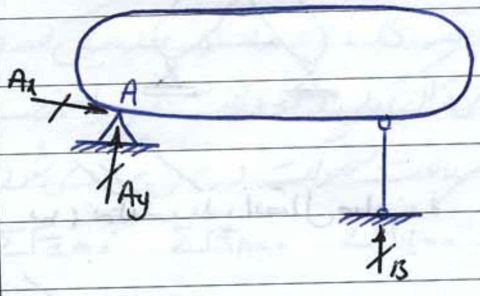


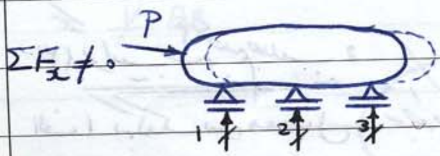
پایداری جسم صلب در صفحه:

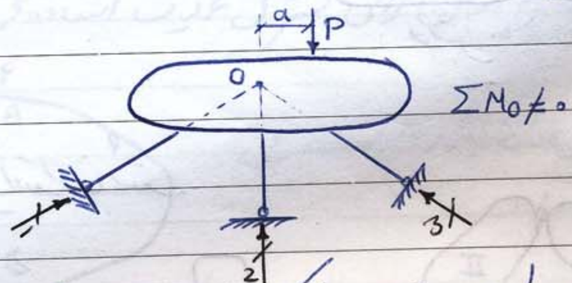
هدف تعیین حداقل مؤلفه لازم برای پایداری این جسم صلب در صفحه می‌باشد (جلوگیری از حرکت در اثر اعمال نیرو)

حداقل مؤلفه‌های لازم برای پایداری جسم صلب در صفحه وجود ۳ عدد مؤلفه می‌باشد. به شرط آنکه:

۱) سه مؤلفه با هم موازی نباشند.
۲) سه مؤلفه در یک نقطه همگرا نباشند.
} ناپایداری هندسی







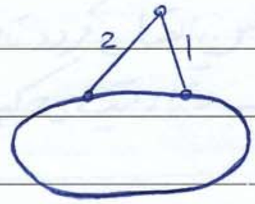
اگر ناپایداری به واسطه وجود تعداد مؤلفه کمتر از ۳ عدد باشد ناپایداری استاتیکی نام دارد.

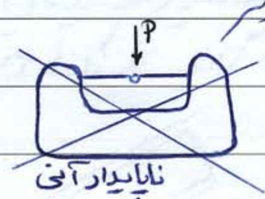
* وقتی جسم صلب پایدار است یعنی بر اثر اعمال نیرو جسم تعادل خود را حفظ می‌کند.

قوانین ترکیب اجسام صلب در صفحه:

در این قسمت قوانینی برای ترکیب اجسام صلب در صفحه با اتصالات مناسب که لازم است طوری که ایجاد یک جسم صلب جدید بنماید معرفی می گردند.

۱) ترکیب یک جسم صلب و یک مفصل: به کمک وسیله دیگر مفصل (link) که هم امتداد نباشند، انجام داد.



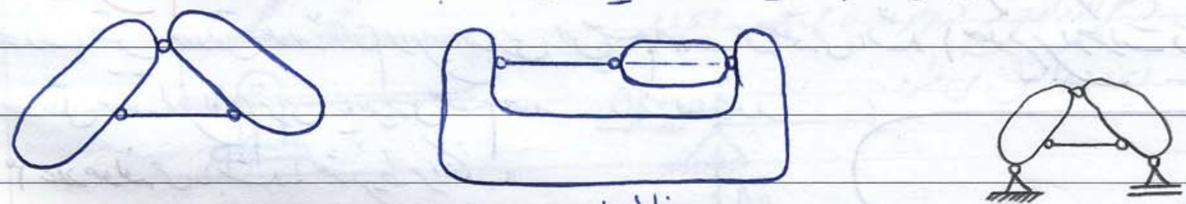


۲) ترکیب دو جسم صلب: به روش های مختلف می توان این ترکیب را انجام داد.

الف) به کمک سه میله غیر موازی و غیر همگرا:

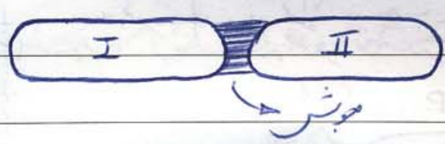
ناپایدار ناپایدار

ب) به کمک یک مفصل و یک میله: به طوری که مفصل و میله در یک امتداد نباشند.



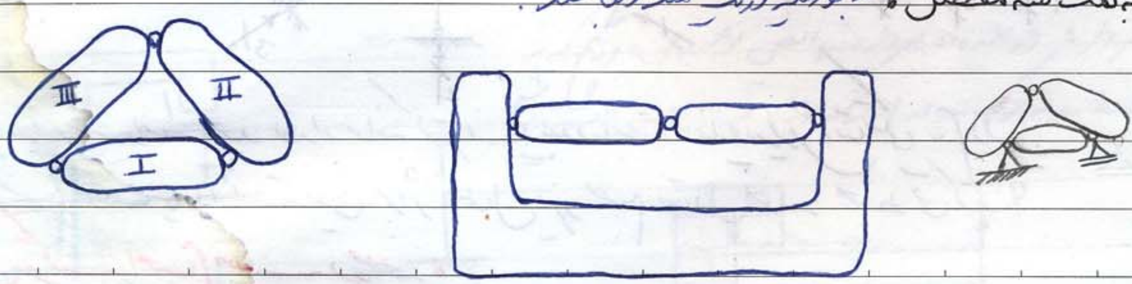
ناپایدار

پ) به کمک یک اتصال صلب:



۳) ترکیب سه جسم صلب:

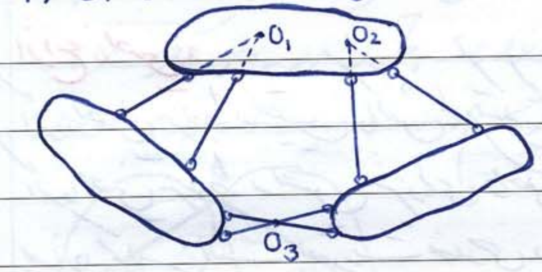
الف) به کمک سه مفصل: به طوری که در یک امتداد نباشند.

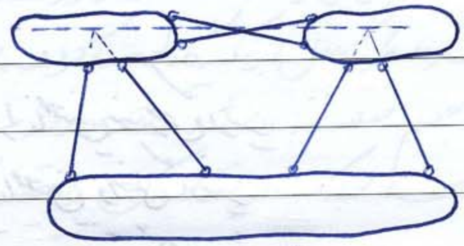


ناپایدار

ب) زنجیر شش میله: بطوریکه هر دو میله دو جسم صلب را متصل نمایند. محل تقاطع دو میله را مفصل موهومی گویند. مفاصل موهومی مانند حالت قبل نباید در یک امتداد قرار گیرند.

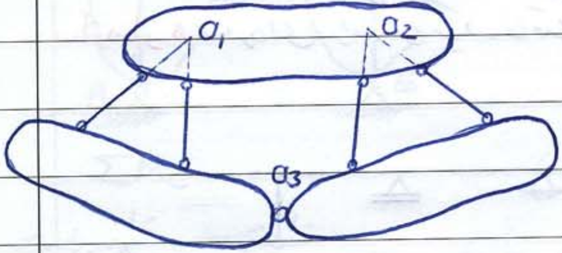
$O_1, O_2, O_3 \rightarrow$ مفصل موهومی





ناپایدار

ج) زنجیر ترکیبی از مفصل و میله: بطوریکه مفصل های واقعی و موهومی در یک امتداد قرار نگیرند.



معادلات تعادل استاتیکی ـ معنی و نامعنی:

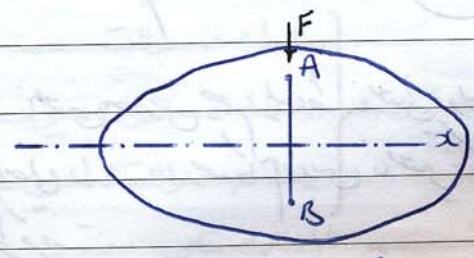
از درس استاتیک می دانیم که برای پایداری یک سازه صفحه ای باید سه شرط زیر برقرار باشد. این سه شرط در واقع شرط صفر بودن برآیند نیروهای وارد بر جسم صلب است.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

به معادلات فوق معادلات تعادل در صفحه گفته می شود که تعداد آن ها برابر با سه می باشد. نوشتن معادله لنگر نسبت به نقطه دیگری مانند B، این معادله جدیدی نیست و معادله بدست آمده ترکیب خطی از سه معادله قبلی است. اما می توان یکی از معادلات نیرو را حذف کرد و به جای آن معادله لنگر نسبت به نقطه جدید نوشت. این امر باعث سهولت در حل مسئله می شود و یا از معادله چهارم می توان برای کنترل عملیات استفاده کرد.

$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$

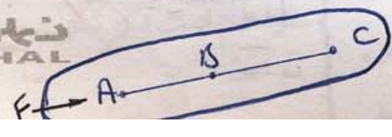
$x \not\perp AB$



در شکل مقابل سه شرط برقرار است ولی تعادل وجود ندارد.

می توان سه شرط را بصورت سه معادله لنگر نوشت. در این حالت A و B و C نباید در یک امتداد واقع گردند.

$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0$



معین و نامعین: اگر بتوان کلیه واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی یک سازه را به کمک معادلات تعادل فوق تعیین نمود، در اینصورت سازه معین گفته می شود. در غیر اینصورت سازه نامعین است.

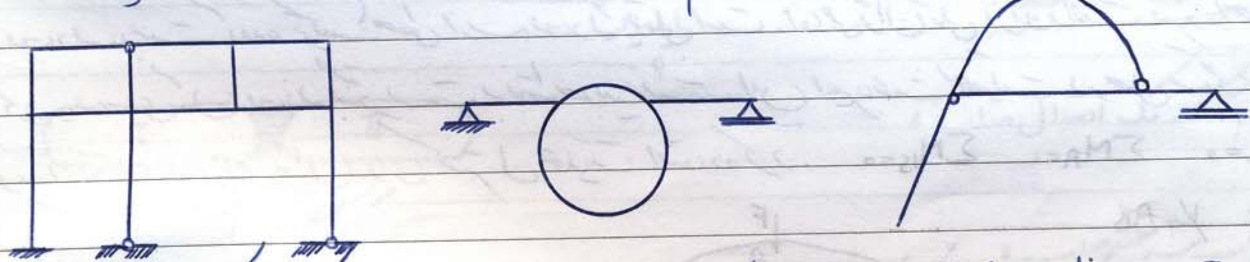
انواع نامعینی:

اگر نامعینی مربوط به تعیین واکنش های تکیه گاهی باشد آن را نامعینی خارجی گویند.
اگر نامعینی مربوط به تعیین نیروهای داخلی باشد آن را نامعینی داخلی گویند.
سازه ممکن است بصورت خارجی و داخلی نامعین بصورت توأم باشد.
از نظر نامعینی خارجی و داخلی سازه ها را در دو دسته باز و بسته طبقه بندی می نمایند.

سازه باز: سازه ای را باز گویند که فاقد هرگونه کادر یا حلقه باشد.

سازه های باز فقط از نظر خارجی بررسی می شوند و نامعینی داخلی برای آن ها مفهومی ندارد. یعنی یک سازه باز اگر از نظر خارجی معین باشد، از نظر نیروهای داخلی نیز معین است.

سازه بسته: سازه ای است که دارای یک یا چند حلقه یا کادر بسته باشد. خرپاها و قاب ها در این رده از سازه ها قرار دارند. بحث خرپاها را به بعد موکول می کنیم. قاب هایی که در این فصل مورد توجه قرار می گیرند.

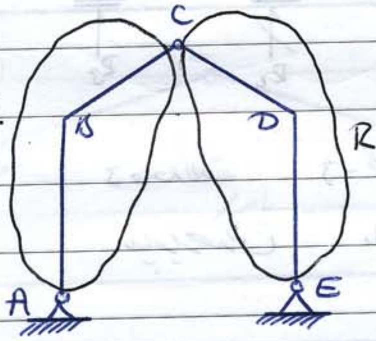


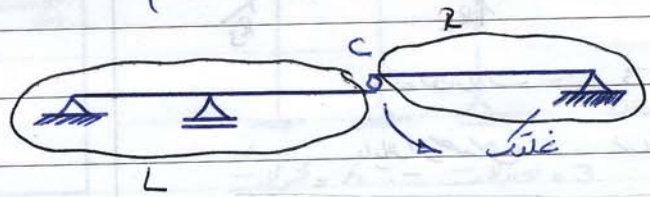
سازه بسته هم از لحاظ نامعینی خارجی و هم از لحاظ نامعینی داخلی باید مورد بررسی جداگانه قرار گیرد. هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی دارد. در هنگام بررسی نامعینی یک سازه بسته باید به تعداد هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی در نظر گرفت.

کادر:

روابط شرطی: بیان کردیم که تعداد معادلات تعادل استاتیکی ۳ عدد می باشد. در بعضی از سازه ها طراح

تعداد شرایطی است که می‌نماید که یکی از نیروهای داخلی صفر گردد. این شرایط یا خرابی‌هایی در معادله تعادل مستقل جدیدی می‌سازند که باید به معادلات تعادل استاتیکی اضافه گردد. به این معادله **شرطی** گویند.
معادلات شرطی می‌توانند به علت وجود **مفصل داخلی** یا **غلتک داخلی** یا خرابی‌ها مشابه باشند.
اگر یک سازه به طور کامل از یک نقطه که جدا گردد می‌توان به وجود معادله شرطی پی برد. یعنی اگر سازه جدا شده جسم صلب باشد فاقد معادله شرطی است و اگر جسم صلب نباشد، دارای معادله شرطی خواهد بود که باید تعداد آن را تعیین گردید.



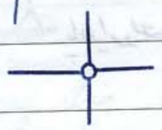


$\sum M_C = 0$ قطعه چپ یا قطعه راست

نقطه c $\sum F_x = 0$

قطعه راست یا قطعه چپ $\sum M_C = 0$

توجه: اگر m عضو در نقطه‌ای به یکدیگر **مفصل** گردند $m-1$ معادله **شرطی** خواهیم داشت. معادله m ام از تعادل کل سازه به دست می‌آید.


⟹ 3 معادله شرطی

تشخیص سازه:

تشخیص سازه به فرآیندی گویند که به کمک آن مشخص می‌گردد سازه پایدار، ناپایدار، معین و یا نامعین است. درجه نامعینی سازه نیز در صورت لزوم تعیین می‌گردد. برای تشخیص سازه‌ها از روش جدولی استفاده می‌گردد.

- **تشخیص سازه‌ها**
  - **سازه‌ی باز**
    - ۱) ساده: (از یک قطعه تشکیل شده و فاقد معادله شرطی است)
      - کمتر از سه مجهول ← ناپایدار استاتیکی
      - 3 = تعداد مجهول: معین
      - 3 < تعداد مجهول: نامعین
      - (معین / نامعین) — ناپایداری هندسی تدقیق گردد.
    - ۲) ترکیبی: تعداد روابط = تعداد شرطی + 3 (از ترکیب چند قطعه تشکیل شده و دارای معادله شرطی است)
      - روابط > مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
      - روابط = مجهول: معین
      - روابط < مجهولات: نامعین
      - (معین / نامعین) — ناپایداری هندسی تدقیق گردد
  - **سازه‌ی بسته**
    - روابط > مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
    - روابط = مجهولات ← معین خارجی و داخلی
    - روابط < مجهولات
      - معین خارجی ـ نامعین داخلی
      - نامعین خارجی ـ معین داخلی
      - نامعین خارجی ـ نامعین داخلی
    - شرط لازم است لیکن کافی نیست. پایداری تدقیق شود.

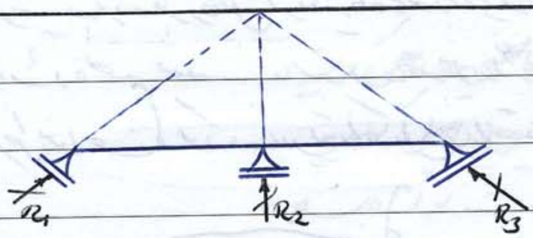
مثال ۱

1) 

معادلات = 3 مجهول = 2

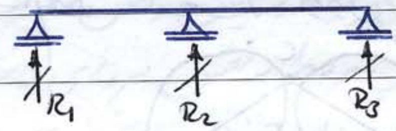
باز ساده

سازه ناپایدار استاتیکی

2) 

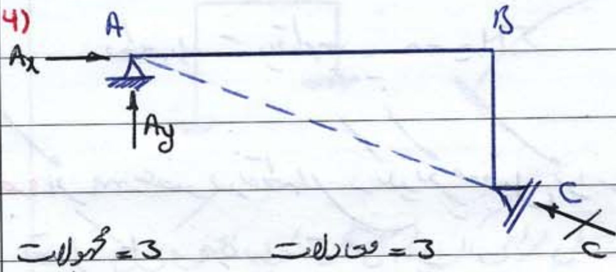
معادلات = 3 مجهولات = 3

ناپایدار هندسی سازه باز

3) 

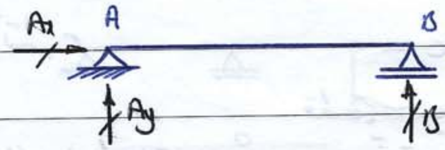
معادلات = 3 مجهولات = 3

ناپایدار هندسی باز ساده

4) 

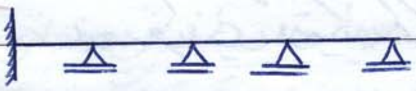
معادلات = 3 مجهولات = 3

ناپایدار هندسی باز ساده

5) 

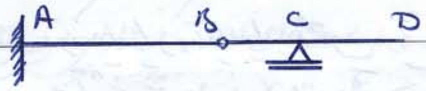
معادلات = 3 مجهولات = 3

پایدار و معین

6) 

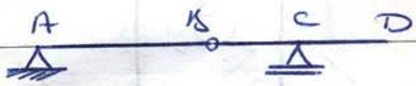
معادلات = 3 مجهول = 7

پایدار و 4 درجه نامعین

7) 

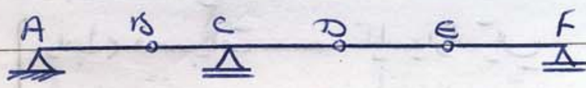
معادلات = 3+1 = 4 مجهولات = 4

سازه پایدار و معین باز ترکیبی

8) 

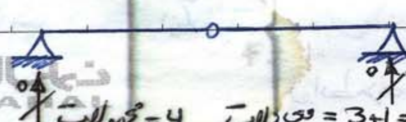
معادلات = 3+1 = 4 مجهولات = 3

سازه ناپایدار استاتیکی باز ترکیبی

9) 

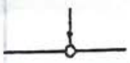
معادلات = 3+3 = 6 مجهولات = 4

ناپایدار باز ترکیبی

10) 

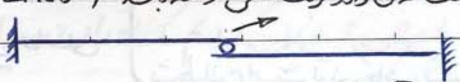
معادلات = 3+1 = 4 مجهولات = 4

*در هر سازه‌ای سه لولا در امتداد هم قرار بگیرند آن سازه ناپایدار آنی است.



بنابراین این سازه ناپایدار است.

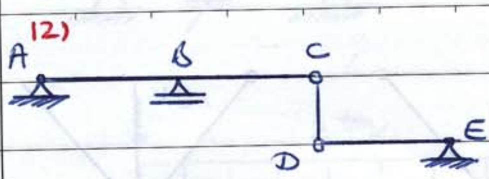
*غلتک است که می‌تواند حرکت افقی داشته باشد ($\Sigma F_x=0$, $\Sigma M=0$)

11) 

معادلات = 3+2 = 5 مجهولات = 6

پایدار و 1 درجه نامعین

12)

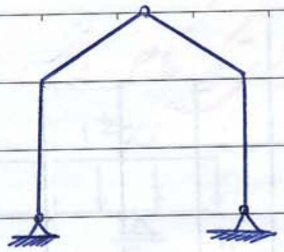


مجهولات = 5

3 = تعادل استاتیکی
2 = شرط
5

پایدار و معین

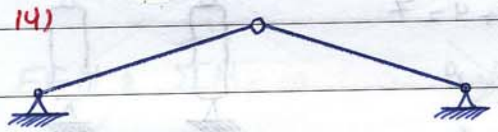
13)



مجهولات = 4

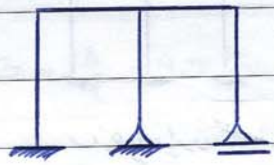
معادلات = 3+1 = 4

14)



پایدار

15)



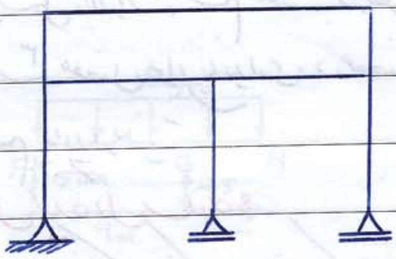
نابرساده

مجهولات = 6

معادلات = 3

پایدار و 3 درجه نامعین

16)

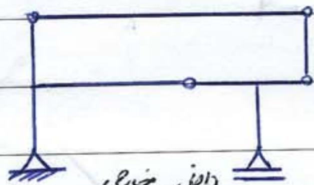


مجهولات = 4 (خارجی) + 3 (داخل) = 7

معادلات = 3

پایدار و 4 درجه نامعین (1 خارجی + 3 داخل)

17)

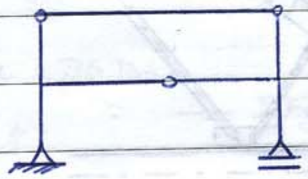


ناپایدار (داخل)

مجهولات = 3 (خارجی) + 3 (داخلی) = 6

معادلات = 3 + 4 = 7

18)

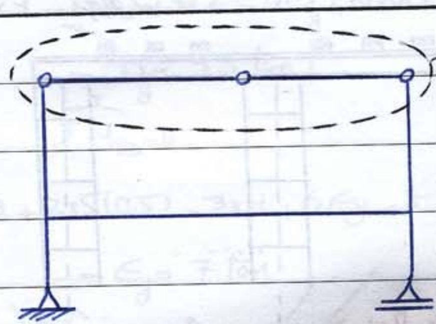


مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 + 3 = 6

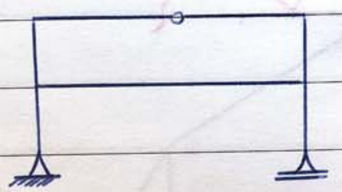
پایدار و معین داخل

19)



ناپایدار کلی

20)

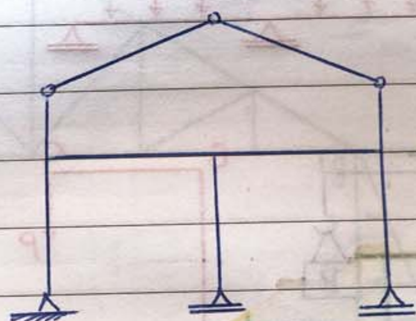


مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 (استاتیکی) + 1 = 4

پایدار و 2 درجه نامعین داخل

21)



مجهولات = 4 + 3 = 7

معادلات = 3 + 3 = 6

پایدار و یک درجه نامعین خارجی

۱) اگر شکل پایین را دو جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود یک مفصل و یک میله برای پایداری فقط یک میله داریم. پس جسم پایدار نیست.

22)

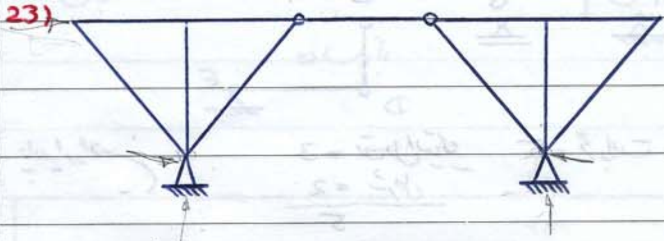
سازه پایدار و نامعین 15 درجه خارجی

42 درجه داخلی

مجهولات = 6×3 + 16×3 = 18 + 48 = 66

معادلات = 3 + 6 = 9

23)



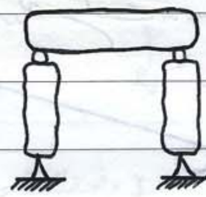
خارجی

مجهولات = 4 + 12 = 16

معادلات = 3 + 4 = 7

~~9 درجه نامعین~~

ناپایدار

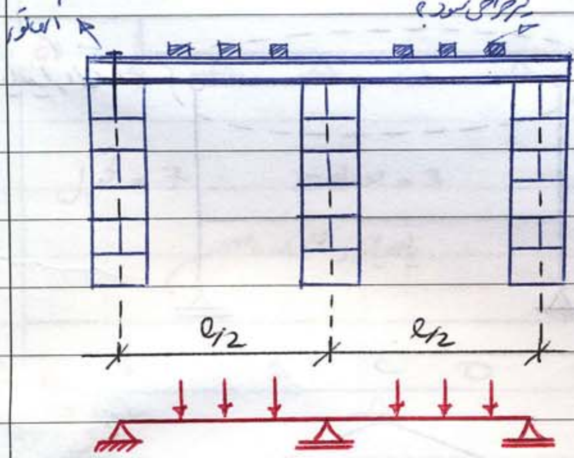


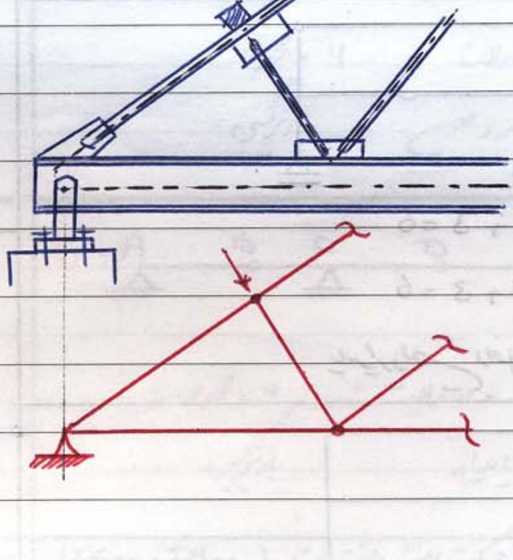
۱۲) اگر شکل بالا را ۳ جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود ۳ مفصل برای پایداری دو مفصل داریم. پس جسم پایدار نیست.

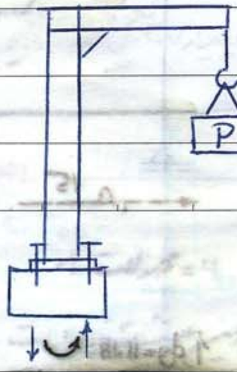
مدل ایده‌آل سازه‌ها

طرح هندسی در ارتباط با یک سازه با یک خط داده می‌شود خود سازه نیست بلکه مدلی از سازه است که هر چه قدر با رفتار و اتصال عضو مطابقت داشته باشد مدل سازی دقیق‌تر بوده و دقت نتایج بیشتر خواهد شد.

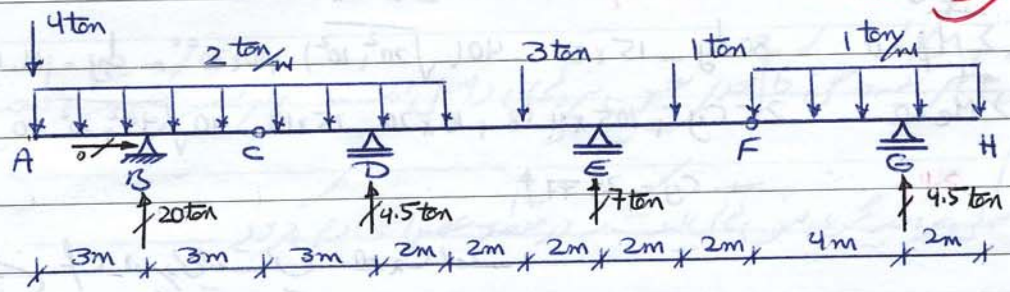
برای این منظور چند نمونه کوچک ارائه می‌شود.







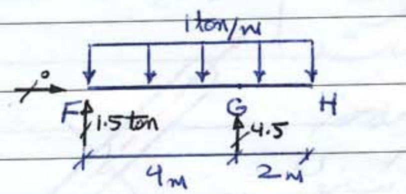
تعیین واکنش های تکیه گاهی

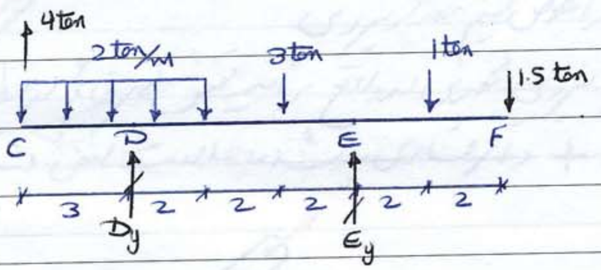


FGH : $\sum M_F = 0 \longrightarrow -6\times3 + 4G = 0 \Longrightarrow G = \frac{18}{4} = 4.5$ ton

کل سازه : $\sum F_x = 0 \longrightarrow B_x = 0$

ABC : $\sum M_C = 0 \longrightarrow -3B_y + 4\times6 + 12\times3 = 0 \Longrightarrow B_y = 20$ ton





$CDEF$: $\sum M_E = 0$

$-1.5\times4 - 1\times2 + 3\times2 - 6D_y + 10\times6.5 - 4\times9 = 0$

$\longrightarrow D_y = 4.5$ ton ↑

$\sum M_D = 0$

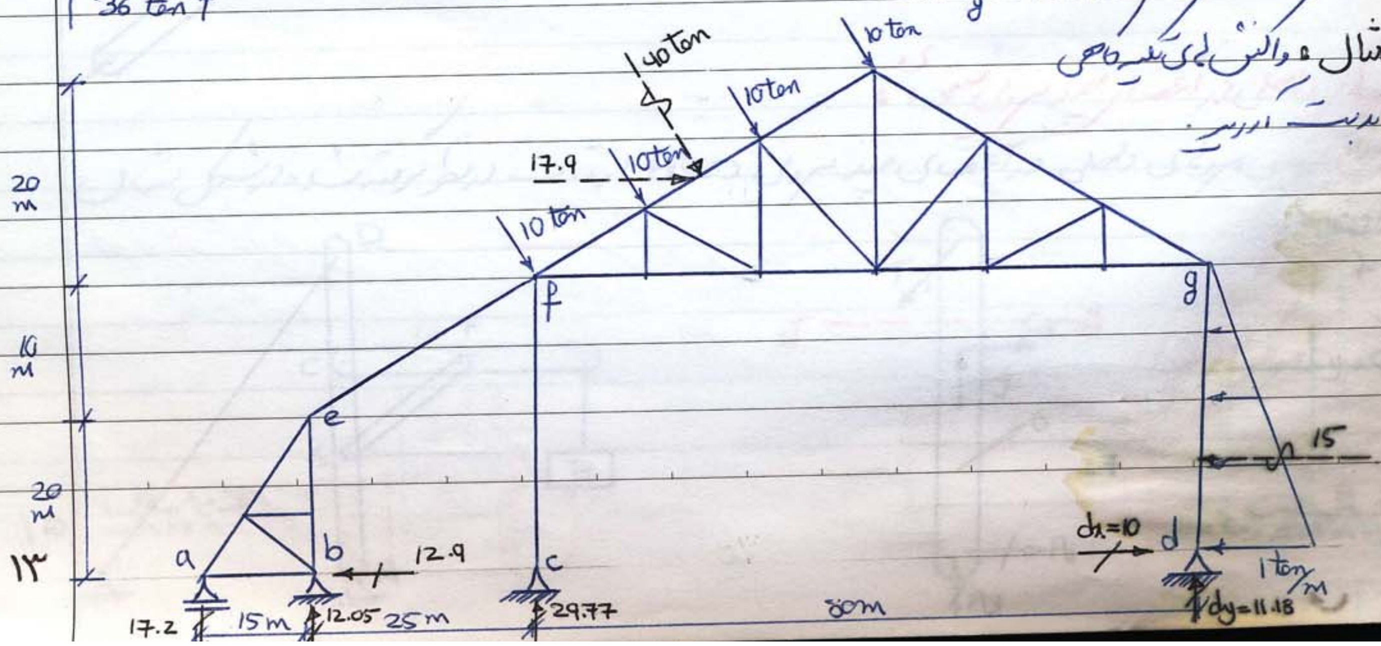
$-4\times3 + 2\times5(0.5) - 3\times4 + 6E_y - 8 - 10(1.5) = 0$

$\longrightarrow E_y = 7$ ton

$\left\{\begin{array}{l} 14 + 22 = 36 \text{ ton} \downarrow \\ 36 \text{ ton} \uparrow \end{array}\right.$ $\longrightarrow \sum F_y = 0$ برقرارست

مثال: واکنش های تکیه گاهی

رادیت ... (ناخوانا)



عضو dg ؛ $\overset{+}{\sum M_g}=0$ $\quad 30d_x-15\times20=0 \rightarrow d_x=10\ ton$

عضو fgd ؛ $\overset{+}{\sum M_f}=0$ $\quad 80d_y-15\times20-40(\sqrt{20^2+10^2})+\underbrace{10\times30}_{=0} \rightarrow d_y=11.18\ ton$

عضو efgd ؛ $\overset{+}{\sum M_e}=0$ $\quad 25C_y+105\times11.18+10\times20-15\times10-40\sqrt{45^2+20^2}=0$

$\rightarrow C_y=29.77\uparrow$

چون cf دو نیرویی است پس $C_x=0$ است.

کل سازه ؛ $\sum F_x=0 \rightarrow -b_x-15+10+17.9=0 \rightarrow b_x=12.9$

عضو abe ؛ $\overset{+}{\sum M_e}=0 \rightarrow 12.9\times20=15a_y \rightarrow a_y=17.2\downarrow$

کل سازه ؛ $\sum F_y=0 \rightarrow 11.18-35.8+29.77+b_y-17.2=0 \rightarrow b_y=12.05$

حمید کاظم

فصل دوم:

تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار تغییرات آنها در طول عضو

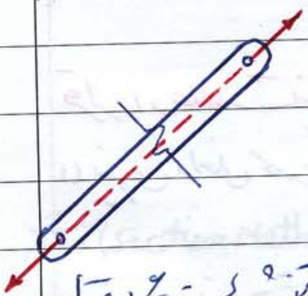
بعد از تعیین واکنش های تکیه‌گاهی گام بعدی تعیین نیروهای داخلی است. برای این کار ابتدا با طبیعت نیروهای داخلی آشنا می‌شویم.

به طور کلی نیروی داخلی برآیند مجموعه تنش‌هایی است که در مقطع عضو ایجاد می‌گردد.

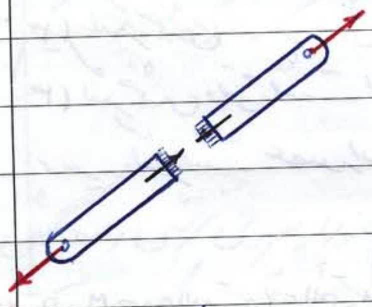
نیروی داخلی اعضای دونیرویی:

اعضای دونیرویی اعضای مستقیمی باشند که دوانتهای آنها مفصلی است و فقط از طریق دوانتهای یک نیروهای خارجی قرار می‌گیرند. نمونه‌هایی از اعضای دونیرویی اعضای موجود یک خرپا می‌باشد. از اعضای دونیرویی ممکن است در قابها نیز استفاده گردد.

اعضای دونیرویی وقتی در حال تعادل هستند که نیروهای وارد بر دوانتهای آنها هم امتداد و مختلف الجهت باشند. در این حالت ممکن است عضو دونیرویی فشاری و یا کششی باشد.

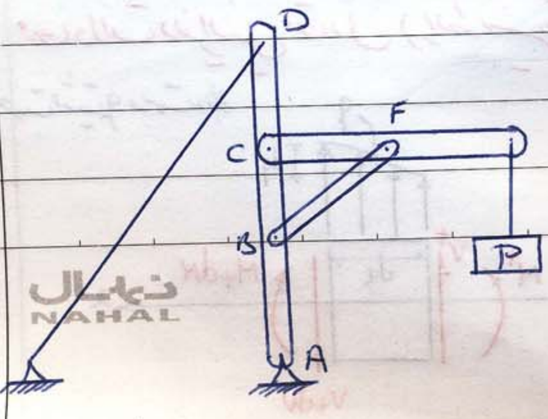


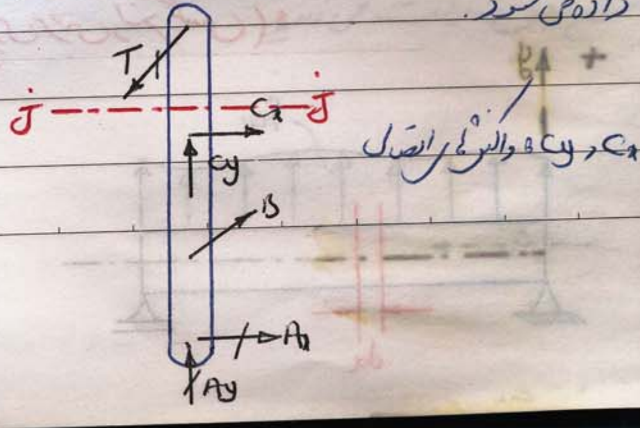
برای تعیین نیروی داخلی در عضو دونیرویی مقطعی از آن عبور می‌دهیم. ملاحظه می‌شود برای حفظ تعادل هر کدام از قطعات چپ و راست کافیست یک نیروی محوری در محل قطع شده داشته باشیم. اگر محل مقطع را عوض کنیم مقدار نیروی محوری تغییر نمی‌کند و در طول عضو ثابت است. این نیروی محوری در واقع برآیند تنش‌های قائم در مقطع می‌باشد. طبق قرارداد اگر کششی باشد با علامت + و اگر فشاری باشد با علامت منفی (−) در نظر گرفته می‌شود.



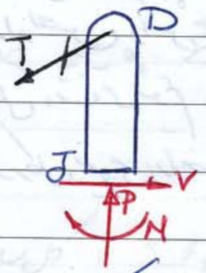
نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی صفحه‌ای:

برای بررسی نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی ABCD از قاب در نظر گرفته شده که در شکل نشان داده می‌شود.





برای مطالعه نیروهای داخلی مقطعی مانند J از آن عبور داده، نمودار آزاد DJ را رسم می‌کنیم.



در این نمودار آزاد برای حفظ تعادل نیروها در امتداد قائم نیاز به نیروی داخلی محوری P می‌باشد. برای تعادل در امتداد افق نیاز به نیروی برشی داخلی V می‌باشد و برای تعادل لنگر وجود لنگر خمشی M لازم است.

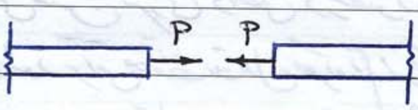
در اعضای چنین نیروی صفحه‌ای در حالت کلی وجود این ۳ نیروی داخلی لازم است. از طرف دیگر با تغییر مقطع J مقدار نیروهای داخلی نیز تغییر می‌کند. حتی ممکن است جهت آن‌ها نیز عوض گردد. پس برای طراحی لازم است نمودار تغییرات آن‌ها در طول عضو رسم گردد.

P: نیروی محوری داخلی = تلاش محوری

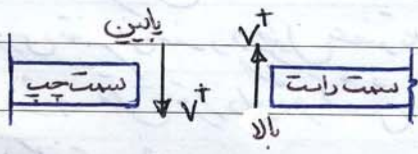
V: نیروی برشی داخلی = تلاش برشی

M: لنگر خمشی داخلی = تلاش خمشی

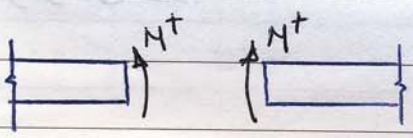
قرارداد علامت نیروهای داخلی:



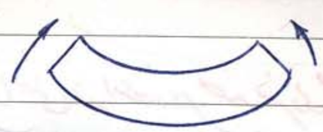
۱) نیروی داخلی محوری P وقتی مثبت است که کششی باشد.



۲) نیروی برشی وقتی مثبت است که در قطعه سمت چپ به سمت پایین و در سمت راست به سمت بالا باشد.

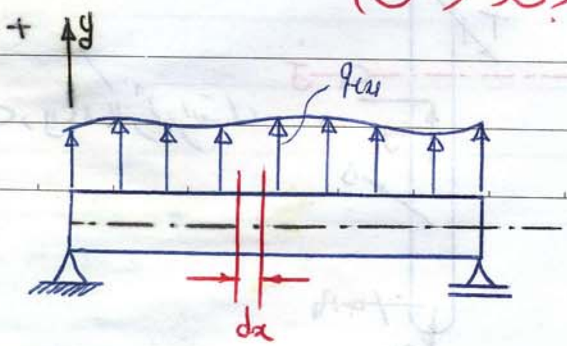


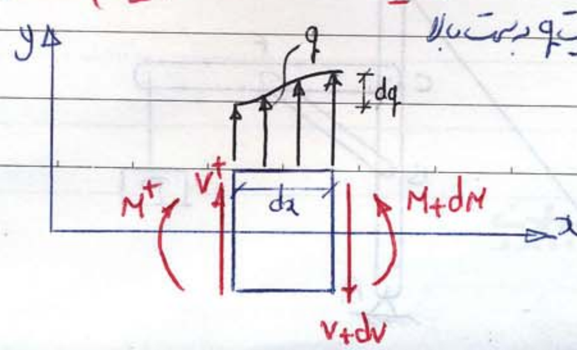
۳) لنگر خمشی وقتی مثبت است که در تار پایین ایجاد کشش نماید. لنگر مثبت عضو را به صورت کاسه‌ای در می‌آورد.



معادلات دیفرانسیل تعادل (روابط بین بارگذاری، نیروی برشی و لنگر خمشی):

* جهت مثبت q به سمت بالا





$$\sum F_y = 0 \uparrow^{+} \Longrightarrow V - (V + dV) + q\,dx + dq\,dx\,\tfrac{1}{2} = 0$$

$$\longrightarrow -dV + q\,dx = 0 \longrightarrow q(x) = \frac{dV}{dx}$$

شیب نمودار برش برابر شدت بار وارده است.

$$\int_C^D q(x)\,dx = \int_C^D dV \Longrightarrow V_D - V_C = \int_C^D q\,dx \qquad (V_2 - V_1 = \int q\,dx)$$

تغییرات برش بین دو نقطه C و D برابر است با بار وارده بین دو نقطه C و D (مقدار بار وارده)

$$\sum M_A = 0 \Longrightarrow -M + (M + dM) - (V + dV)\,dx + q\frac{(dx)^2}{2} + \frac{1}{2}\,dq\,dx\cdot dx\,\frac{2}{3} = 0$$

$$\longrightarrow dM - V\,dx + (dx)^2\,dV = 0 \longrightarrow V(x) = \frac{dM}{dx}$$

شیب نمودار لنگر خمشی برابر نیروی برشی در هر مقطع می‌باشد.

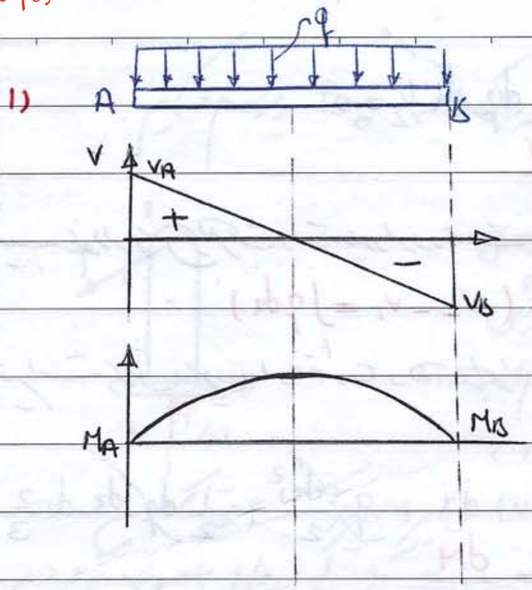
$$\int_C^D V(x)\,dx = \int_C^D dM \Longrightarrow M_D - M_C = \int_C^D V\,dx \qquad (M_2 - M_1 = \int V\,dx)$$

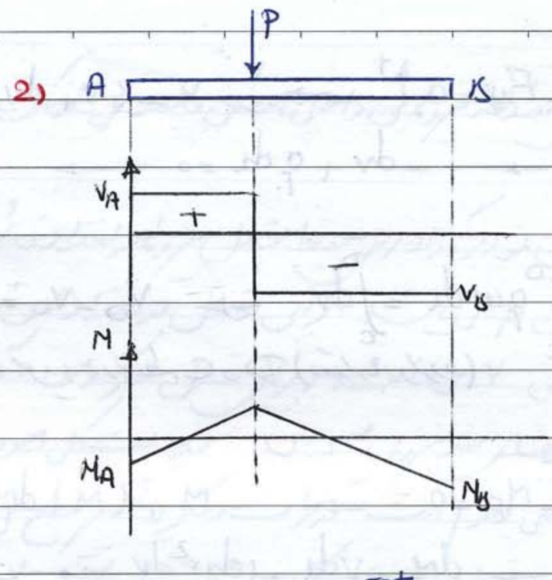
تغییرات لنگر خمشی بین دو نقطه C و D برابر با سطح زیر نمودار برش بین دو نقطه C و D.

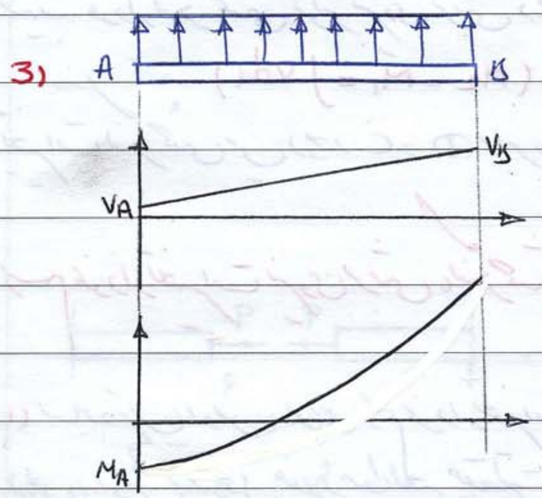
رسم نمودار تغییرات نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری:

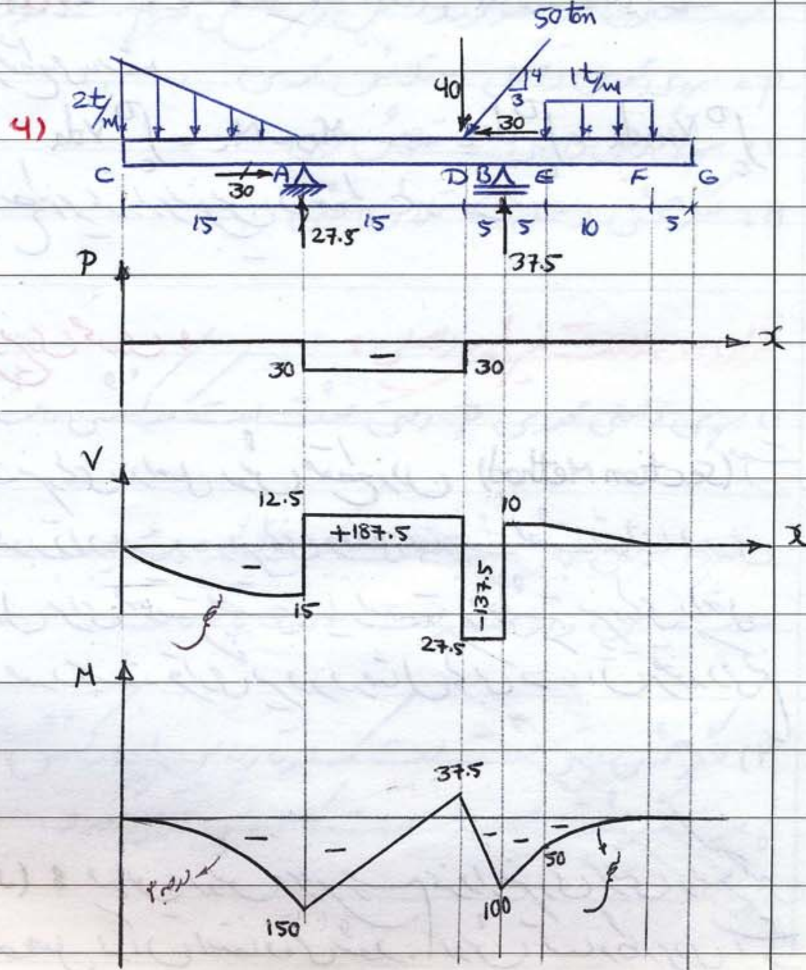
۱) ساده‌ترین روش برای رسم نمودار تغییرات نیروهای داخلی روش مقطع زدن (Section Method) است. در این روش در محل مورد مطالعه مقطعی عبور داده شده و نیروهای داخلی در جهت مثبت نشان داده روی آن نمایش داده می‌شوند. معادلات تعادل برای قسمت چپ یا راست را نوشته نیروهای داخلی محاسبه می‌گردد. این روش در اینجا مورد بحث قرار گرفته در مثال‌هایی که به آن برخورد می‌کنیم آن را مورد توجه قرار می‌دهیم.

۲) روش جمع زدن (Summation Method): در این روش برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی از معادلات دیفرانسیل تعادل و نتایج حاصل از آن استفاده می‌شود. روش کاربردی است و در مثال‌های این فصل بیشتر از آن استفاده خواهد شد. توجه شود که نیروی محوری کماکان با روش مقطع زدن بدست می‌آید.





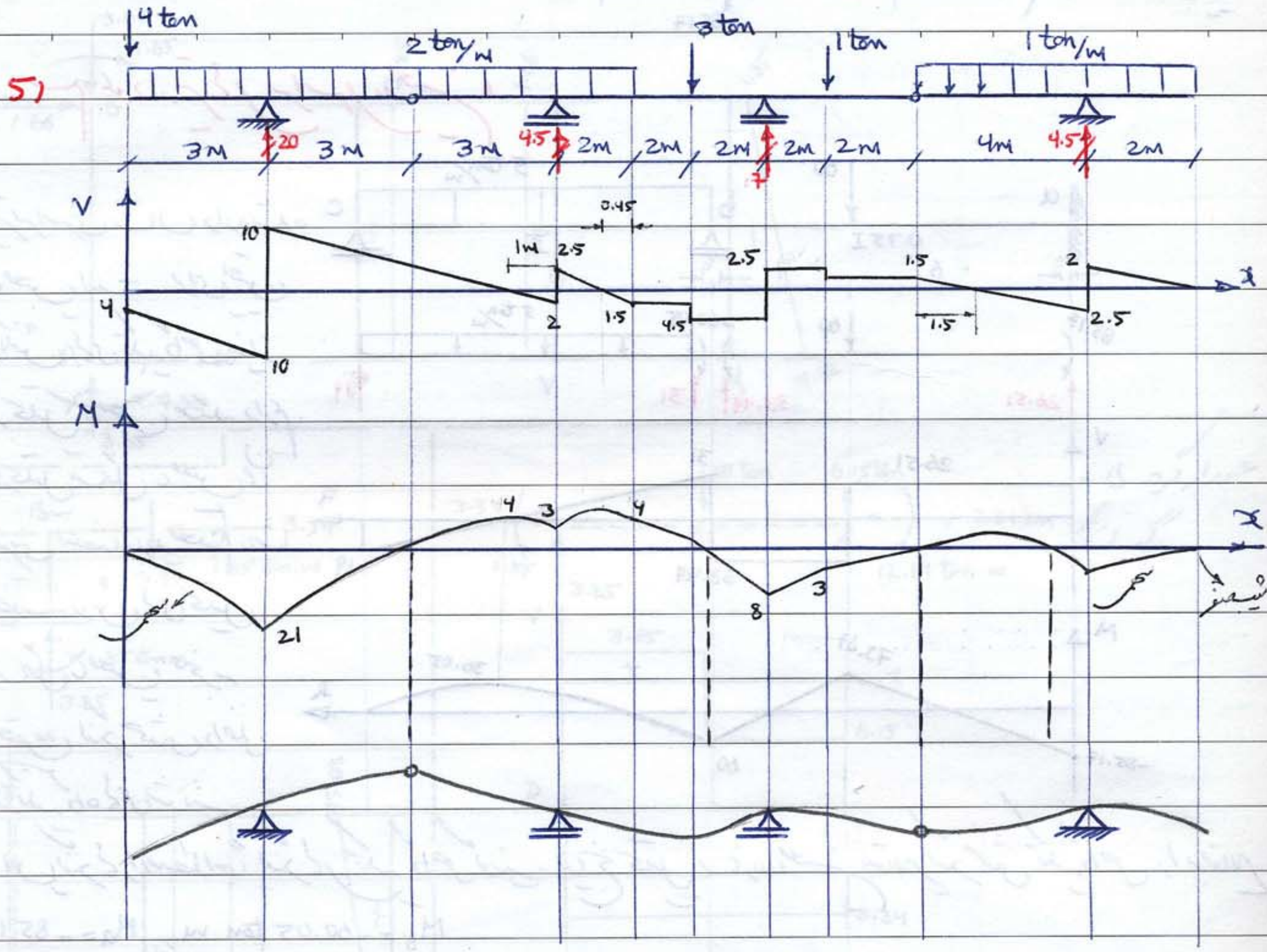




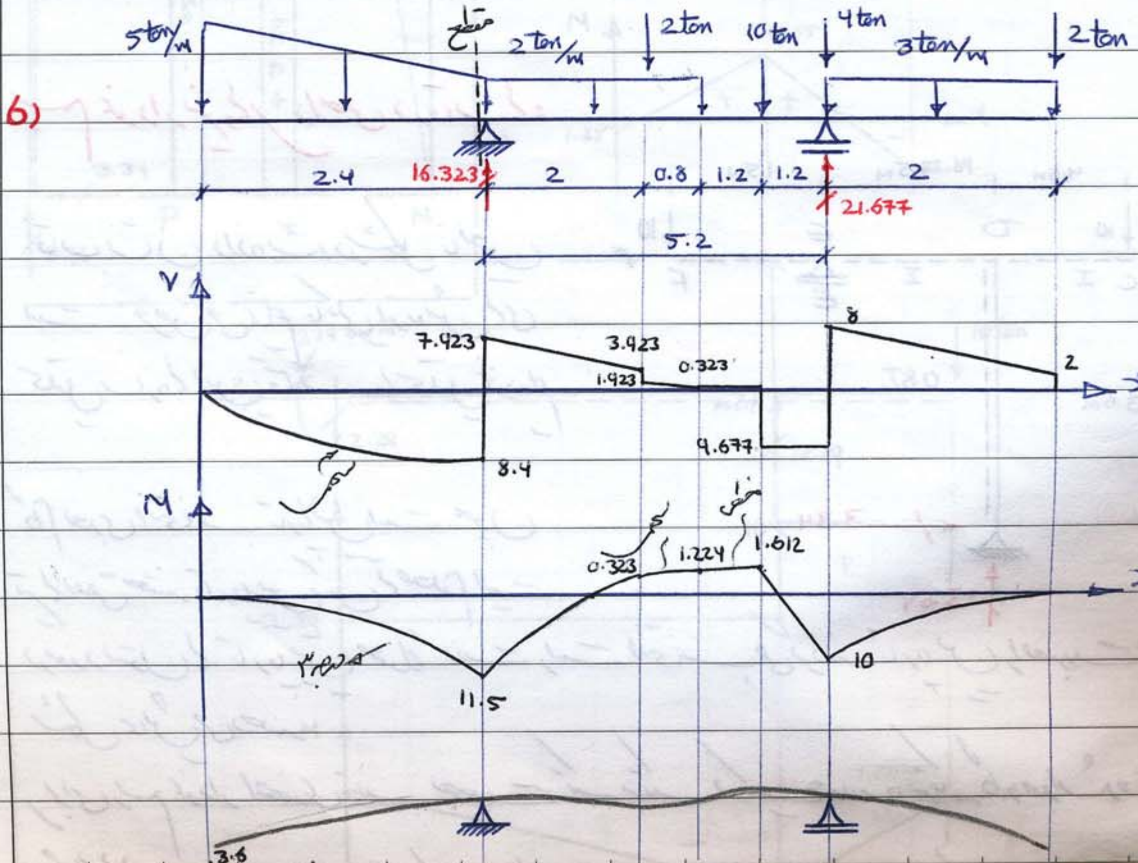
نکته ۶: در هنگام رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی همواره تمام نیروهای خارجی باید به مولفه‌هایی در امتداد عمود و در محور عضو تجزیه گردند.

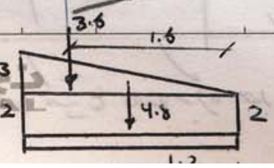
مفصل داخلی تأثیری بر نمودار برشی ندارد لنگر خمشی صفر است.

5)



6)

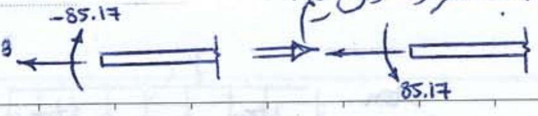




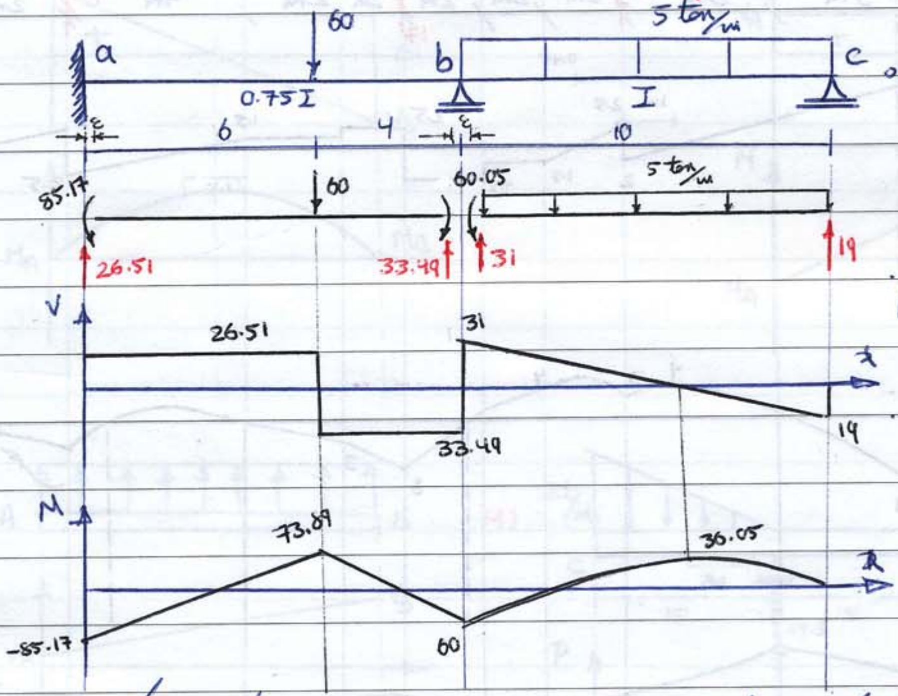
$M = 4.8 \times 1.2 + 3.6 \times 1.6 = -11.5$

اگر لنگر خمشی داخلی داده شد در نقطه مورد نظر مقطع می زنیم و جهت قراردادی لنگر را رسم می کنیم و سپس عدد را با جهت قراردادی قرار می دهیم. اگر عدد لنگر منفی بود می توانیم جهت لنگر را عوض کنیم.

مثال پایین (نقطه a)



رسم نمودار تیرهای سراسری نامعین

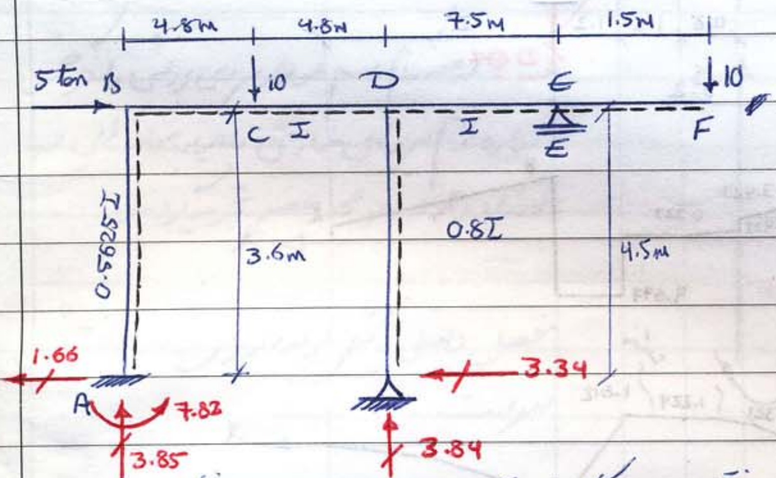


تیر سراسری نشان داده شده نامعین است. برای تعیین واکنش های تکیه گاهی نیاز به تحلیل نامعین مسئله داریم. در تحلیل مسائل نامعین ممان اینرسی اعضا باید معلوم باشد. اغلب روش های تحلیل مسائل نامعین منجر به تعیین لنگر خمشی داخلی در تکیه گاه ها می شوند.

این لنگرها را اصطلاحاً لنگرهای تکیه گاهی گویند. نتایج تحلیل سازه نامعین مقادیر لنگر خمشی تکیه گاهی را به مقادیر

$M_b = -60.05$ ton.m , $M_a = -85.17$ ton.m

رسم نمودار نیروهای داخلی در قاب ها

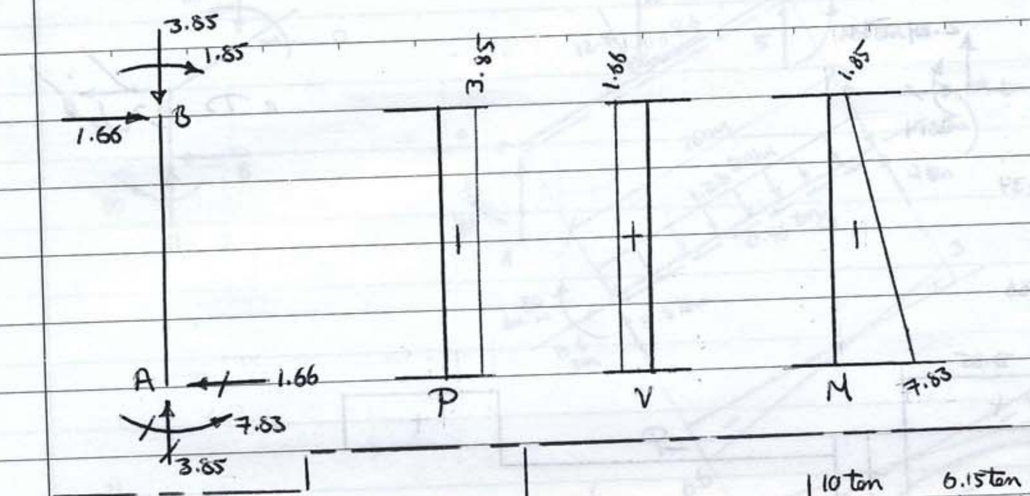


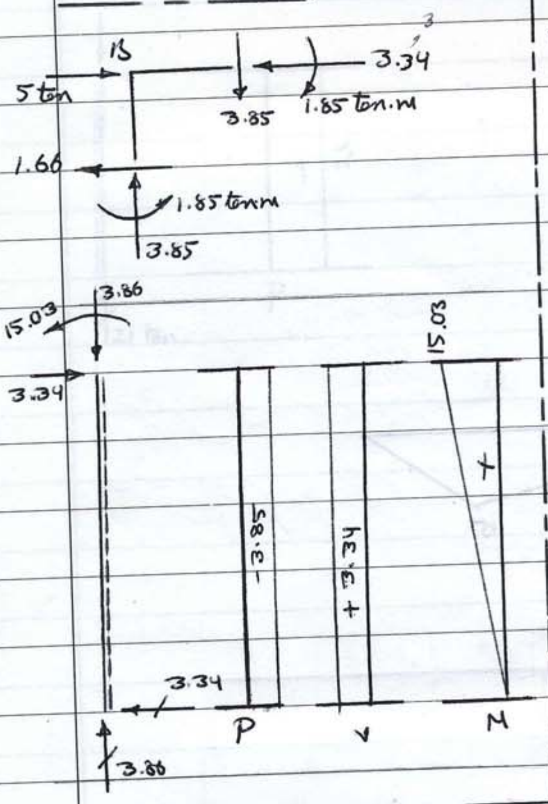
قاب نشان داده شده نامعین است. فرض می کنیم با یکی از روش های تحلیل سازه ها این قاب را تحلیل نموده ایم.

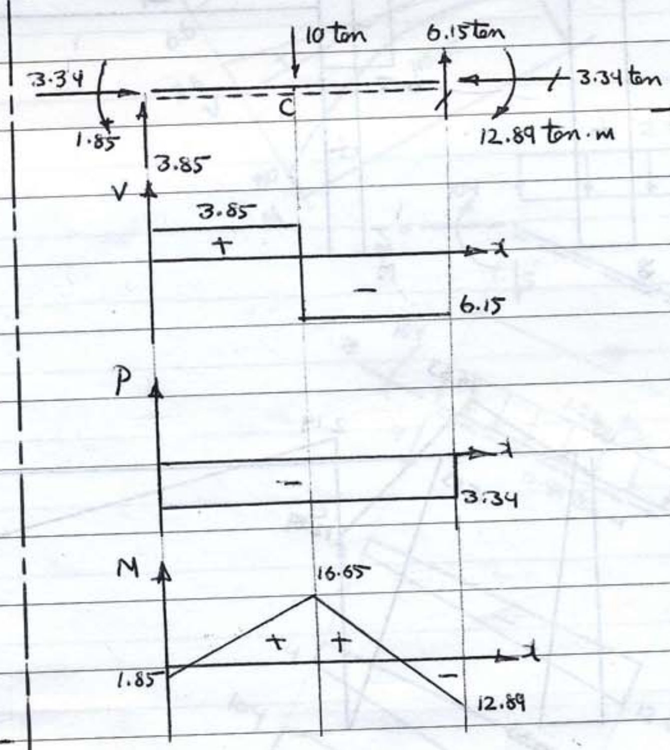
گام بعدی آنالیز تارپایین است. چون تیرهای افقی هستند تارپایین آن ها معلوم است. در مورد ستون ها تارپایین معمولاً سمت راست آنالیز می گیرند. تارپایین را به صورت خط چین روی شکل نمایش می دهند.

برای رسم نمودار اعضای قاب به صورت تک تک در کنار گره با فاصله به تکیه گاه جدا شده نمودار آن ها را رسم می کنیم.

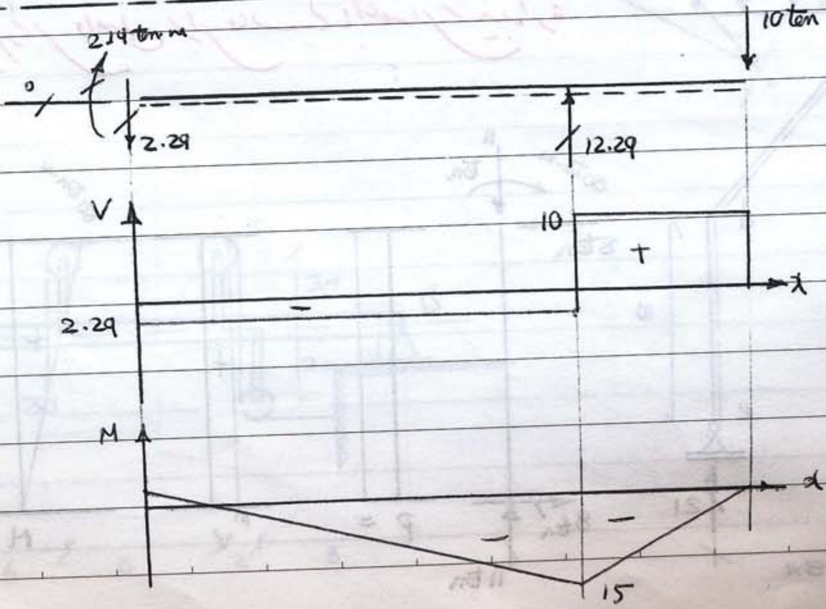
* عضو AB را تا ε فاصله به گره جدا می کنیم و چون گره باری نداریم یعنی 5 ton را اعمال می کنیم.



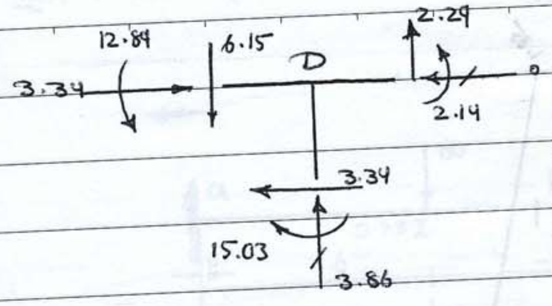


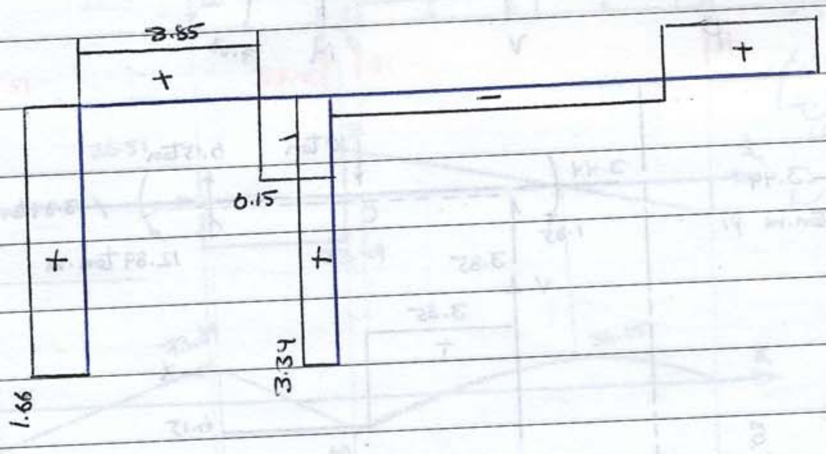


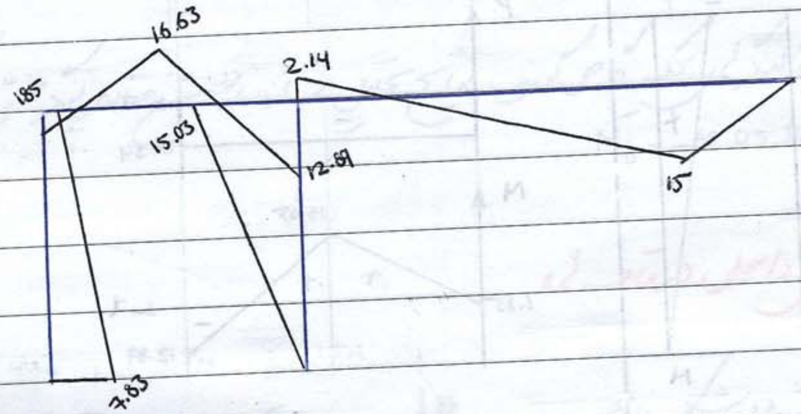
عبور از گره B، کنترل استاتیکی



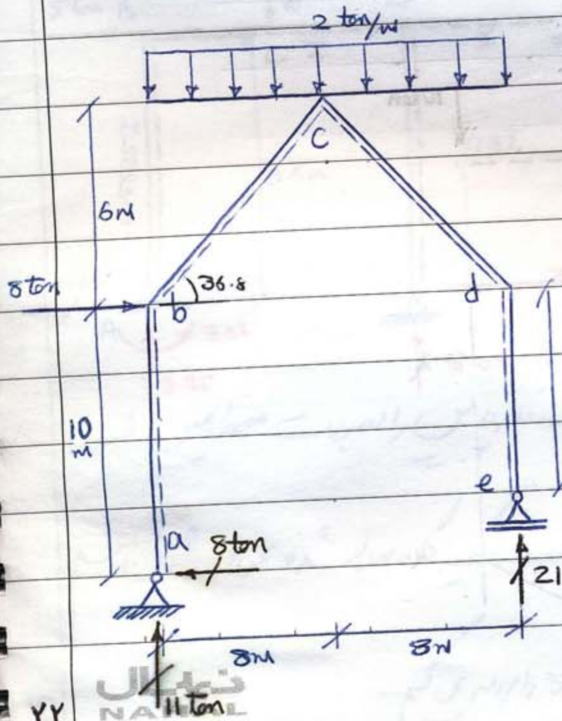
کنترل گره D

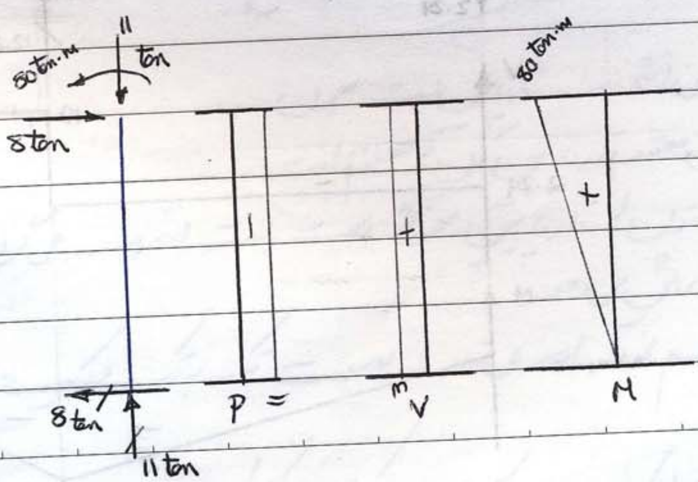


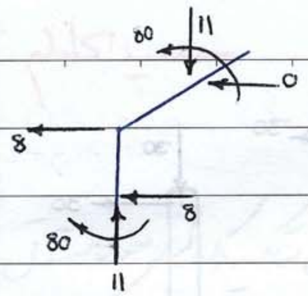


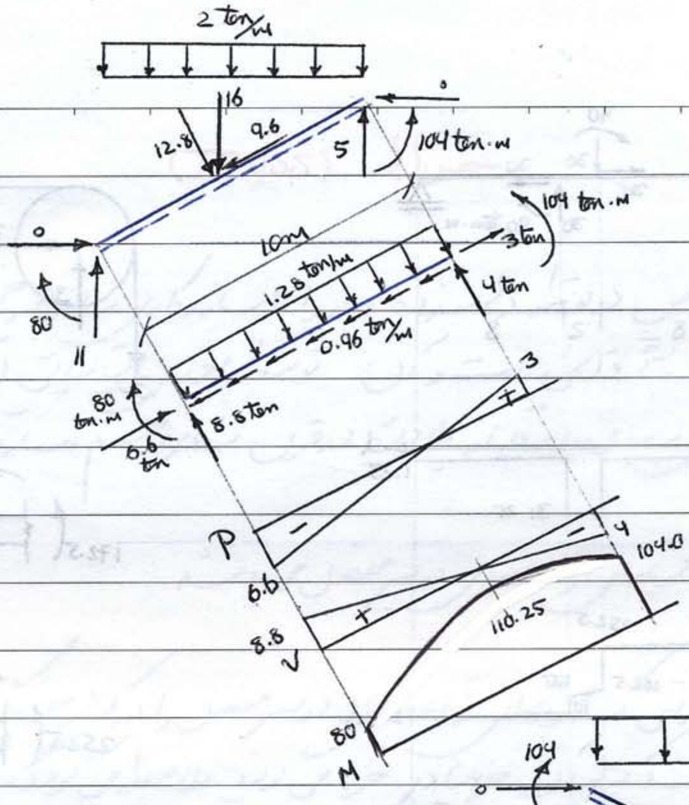


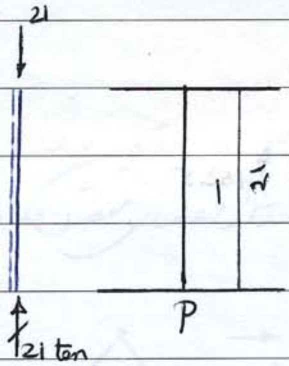
رسم نمودار نیروهای داخلی برای قاب با اعضای شیبدار

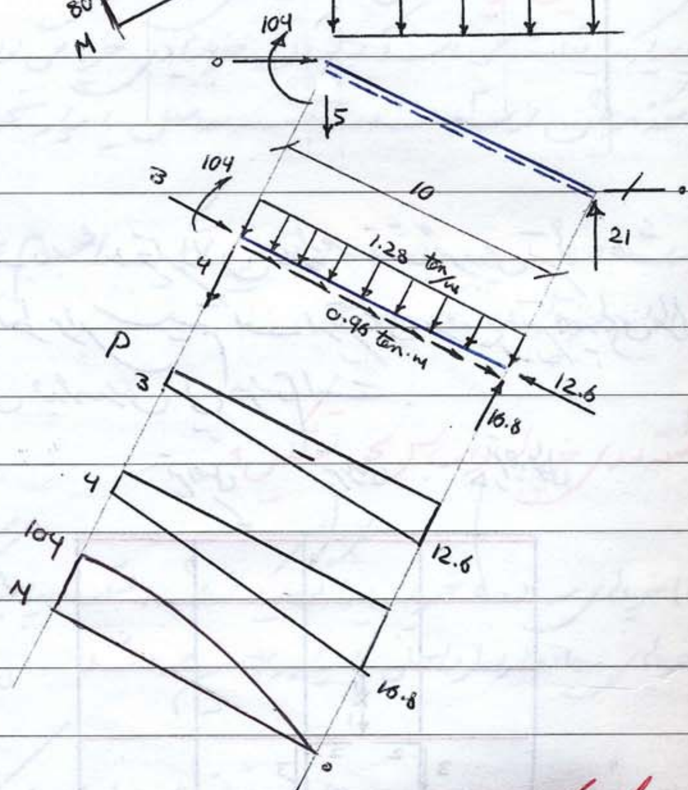




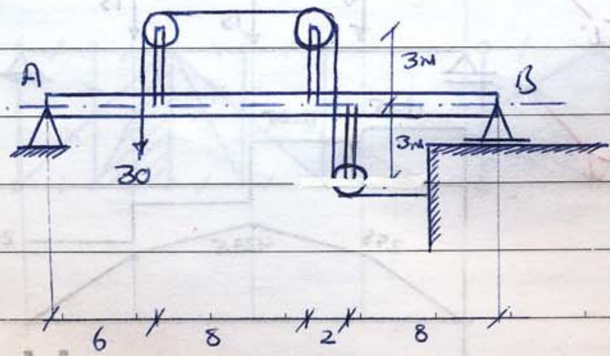


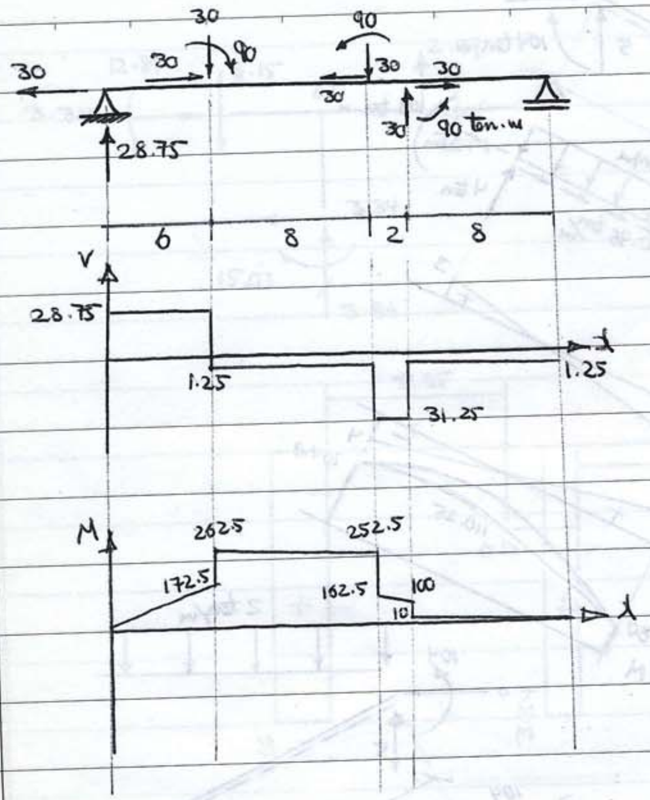


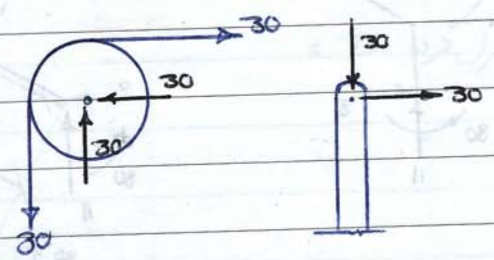


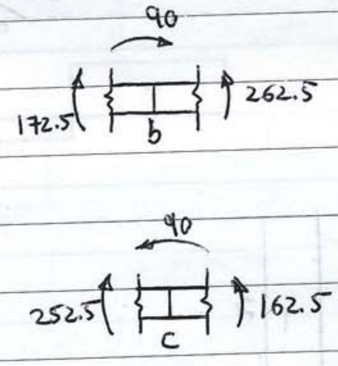


وجود لنگر متمرکز

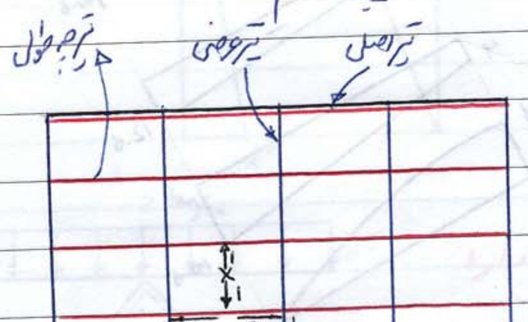


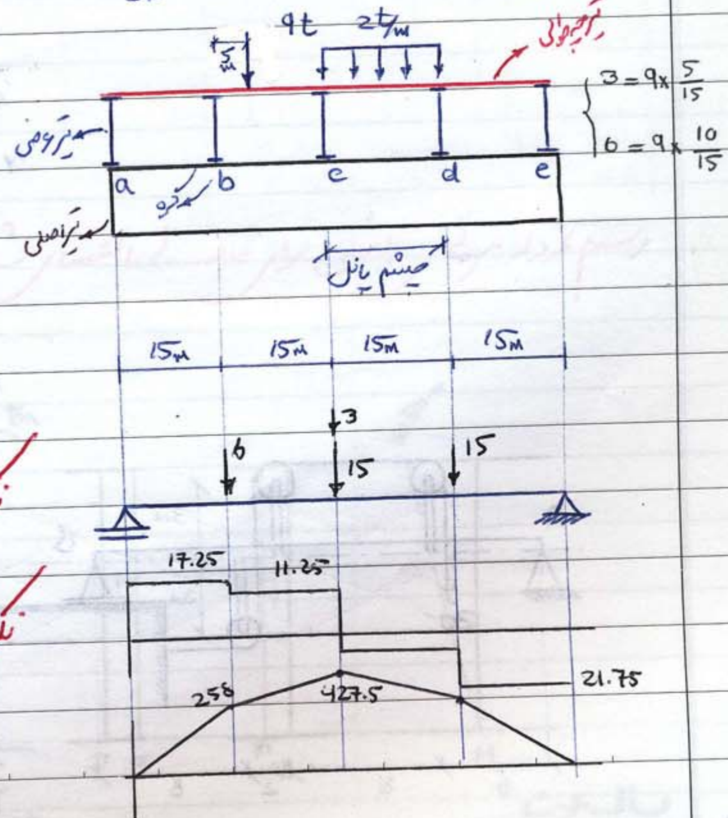






تیرهای اصلی: در تیرریزی کف که وقتی دهانه بزرگ باشد قرار دادن بارها مستقیماً بر روی تیرها باعث می‌شود که تیر بسیار غیر اقتصادی گردد. از این نظر برای سیستم کف از تیرهای عرضی و تیرچه‌های طولی در کنار تیرهای اصلی استفاده می‌گردد. چنین کاری در طراحی پل مرسوم است.





نکته: بر تیر اصلی بار فقط از طریق گره‌ها اعمال می‌شود.

نکته: برش در هر چشمه ثابت است. لنگر حداکثر در محل گره رخ می‌دهد.

حمید کاظم

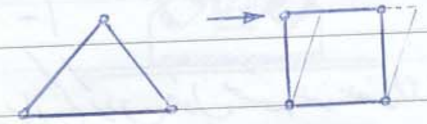
فصل سوم

خرپاها (TRUSS)

خرپا سازه‌ای است که بین دو نقطه دهانه زده و بار را با سازوکاری به غیر از خمش به تکیه‌گاه‌های خود منتقل می‌نماید. سازه‌ای نسبتاً قدیمی است و آن توسط معماری ایتالیایی (آقای پالادیو) ابداع شد. در طرح‌ها و نقاشی‌های به جای مانده از پالادیو در قرن شانزدهم سازه‌های چوبی شبیه به خرپا به تعداد زیاد دیده می‌شود.

از نظر سازه‌ای خرپا مجموعه‌ای از اعضای دوسر مفصل می‌باشد.

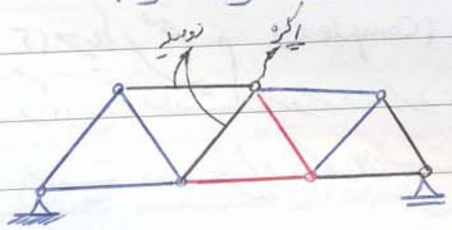
نحوه تشکیل خرپاها: وقتی که مجموعه‌ای از اعضای دوسر مفصل را در کنار هم قرار دهیم ساده‌ترین حالت پایدار یک مثلث می‌باشد که به آن هسته بنیادی خرپا می‌گویند. ملاحظه می‌گردد که اگر تعداد اعضای مفصل شده به هم بیش از ۳ باشد، ترکیب حاصل پایدار نخواهد بود.



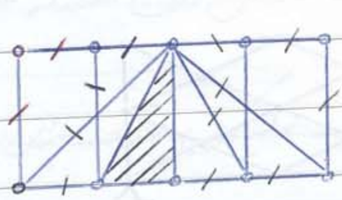
با رشد مثلث‌ها با استفاده از قوانین ترکیب اجسام صلب می‌توان به انواع خرپاها دست یافت.

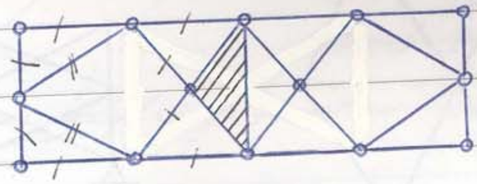
دسته‌بندی خرپاها بر اساس نحوه تشکیل:

۱) خرپاهای ساده: خرپایی را گویند که از رشد مثلث پایه به کمک یک گره و دو میله تشکیل می‌یابد.
خرپاهای ساده از نظر داخلی پایدار و معین می‌باشد.

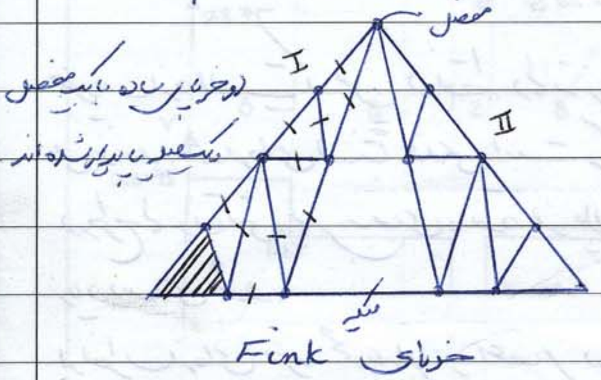


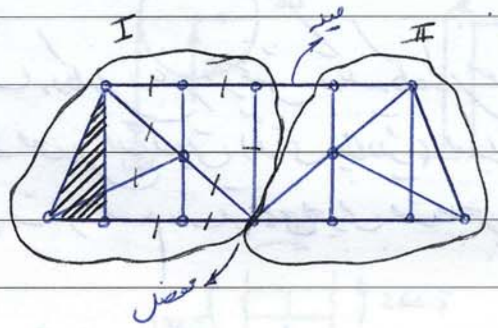
برای اثبات خرپای ساده خرپای مثلثی مبنا را فرض می‌کنیم و روش دو میله یک گره را بررسی می‌کنیم.





۲) خرپای مرکب: از ترکیب دو یا چند خرپای ساده به کمک قوانین ترکیب اجسام صلب تشکیل می یابد.

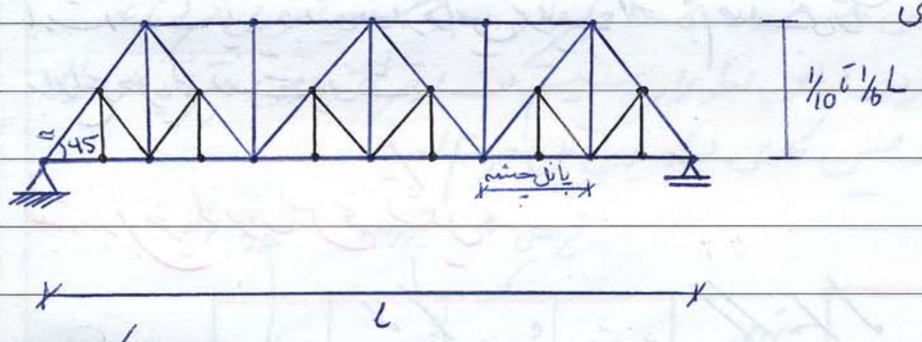




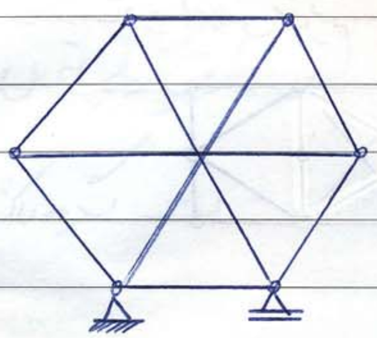
خرپاهای مرکب نیز از لحاظ داخلی معین و پایدارند.

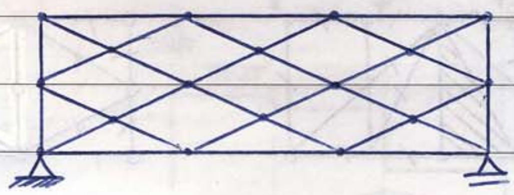
۳) خرپای تقسیم شده: حالتی از خرپاهای ساده هستند که در آن به علت بزرگی چشمه ها سعی می شود طول چشمه تقسیم شده و کوچک تر گردد. معمولاً در خرپاهای پل سازی با دهانه های بلند مورد استفاده دارد.

برای کم کردن طول چشمه از عضوهای میله و گره استفاده می کنند.



۴) خرپاهای مبهم (Complex): مجموعه ای از اعضای دو سر مفصل می باشند که پایدار هستند، لکن در آن ها مثلث پایه وجود ندارد. پایداری آن ها را تشخیص (به کمک روش های هندسی امکان پذیر نیست) و با روش هایی که در قسمت های دیگر مورد بحث قرار می گیرد بررسی می شود.

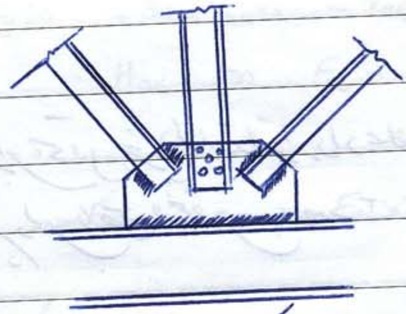


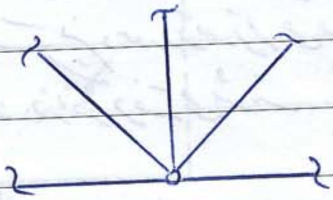


مفروضات اولیه تحلیل خرپاها: برای اینکه بتوان خرپایی را با اصول استاتیک (۳ رابطه تعادل) تحلیل نمود باید مفروضات زیر را در آن انجام دهیم.

خرپاهای واقعی دارای تمام این خصوصیات نیستند، لیکن اگر مفروضات ما بتوانند باعث سادگی کار شده و همچنین نتایج حاصله اختلاف زیادی با تحلیل دقیق نداشته باشد می توان از این مفروضات استفاده نمود و تحلیل خرپاها را بسیار ساده نمود.

۱) اعضای خرپا در انتها به همدیگر لولا شده و اصطکاک در لولا صفر است. در خرپاهای واقعی نه تنها اعضا در انتها به هم لولا نمی شوند، بلکه حتی به همدیگر جوش نیز می گردند. این اتصال نه شرایط لولا بدون اصطکاک ندارد.





اتصالات واقعی نه تنها لولایی نیستند بلکه صلب می باشند. تحلیل واقعی نشان می دهد که در اعضای خرپا، علاوه بر نیروی محوری، لنگر خمشی نیز در دو انتها ظاهر می شود. به این لنگرها، لنگرهای ثانوی گویند. تجربیات عملی نشان می دهد وقتی که ارتفاع خرپا در حدود 0.1 تا 0.6 دهانه باشد و زوایای قطری که در حدود $45°$ باشد مقدار لنگرهای ثانوی کوچک بوده و نیروی محوری خرپای ایده آل بسیار نزدیک به خرپای واقعی خواهد بود. پس ما این شرط ایده آل سازی لولایی را می پذیریم.

۲) اعضای خرپا مستقیم می باشند (اگر نباشد نیروی محوری لنگر می سازد)

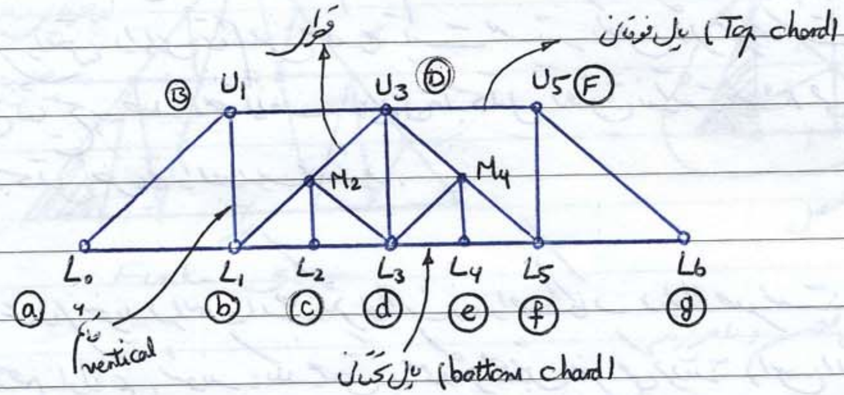
۳) نیروهای خارجی و تکیه گاهها بر گره ها اعمال می شوند. در عمل تأمین این شرط بسیار ساده است. تنها نقطه ابهام وزن اعضای خرپاست که به صورت گسترده در طول عضو قرار دارد. در عمل وزن اعضا را به صورت دو بار متمرکز در دو انتها اعمال می کنیم.

تغییر شکل های خرپا کوچک هستند، هندسه خرپای تغییر شکل یافته با حالت اولیه آن اختلاف چندانی ندارد.

نتیجه مفروضات فوق: اعضای خرپا 2 نیرویی می باشند و در آنها فقط نیروهای محوری ایجاد می گردد. نیروی محوری می تواند کششی باشد. در این صورت با علامت مثبت نمایش می دهند و اگر فشاری می باشد

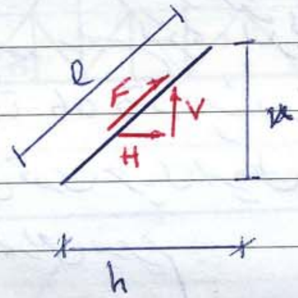
با مثلث شکل می‌دهند

نامگذاری اعضای خرپاها



برای تحلیل خرپاها ابتدا قرارداد علامت نیرو معمولاً توضیح قرار می‌گیرند. نیروهای داخلی کششی با علامت + و نیروهای داخلی فشاری با علامت − در نظر گرفته می‌شوند.

ارتباط بین مولفه‌ها و نیروی عضو



$$\frac{F}{l}=\frac{H}{h}=\frac{V}{v}$$

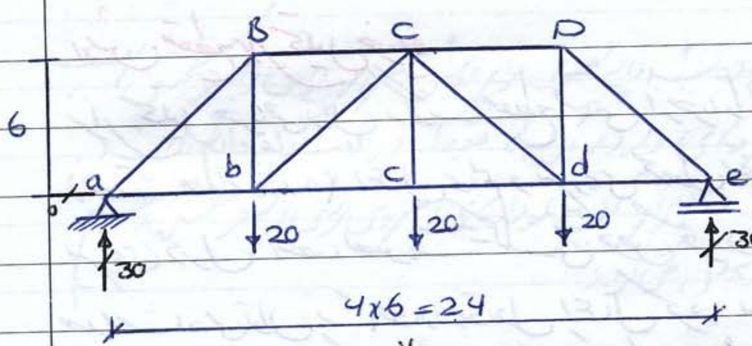
روش گره برای تحلیل خرپاها

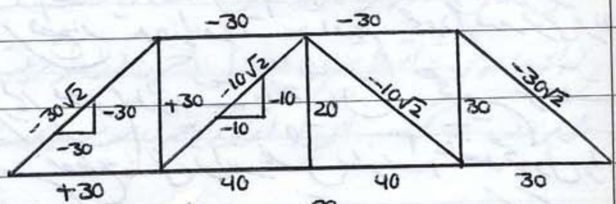
در روش گره برای تحلیل خرپا، ابتدا واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه می‌گردد سپس گره‌های خرپا به صورت مجزا آزاد شده و نمودار آزاد آن‌ها رسم می‌گردد. در این نمودار آزاد نیروهای معلوم در جهت واقعی و نیروهای مجهول اعضا به صورت کششی نمایش داده می‌شوند. سپس معادلات تعادل را برای این گره اعمال می‌کنیم. با توجه به اینکه نیروها متقارب هستند دو معادله تعادل بیشتر نخواهیم داشت.

$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0$

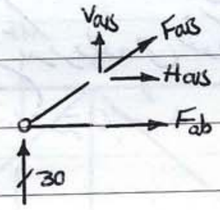
بنابراین باید گره‌ای را آزاد نماییم که دو مجهول بیشتر نداشته باشد. همچنین توصیه می‌شود که ترتیب انتخاب این گره‌ها این گونه باشد که طراح بدون نوشتن معادلات تعادل اقدام به تعیین نیروها نماید. در حالات متعددی این موضوع امکان‌پذیر می‌باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در شکل را تحلیل نمایید.

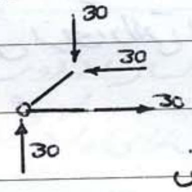




گره a:



گره a:



روش استاتیک ذهنی

$\Sigma F_y = 0 \quad +30 + V_{aB} = 0 \rightarrow V_{aB} = -30\,ton$

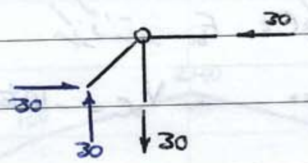
$H_{aB} = -30 \quad F_{aB} = -30\sqrt{2}$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{ab} + H_{aB} = 0$

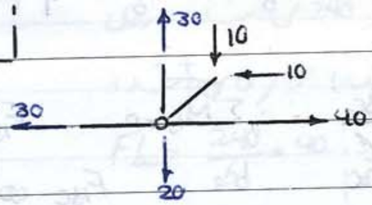
$\rightarrow F_{ab} - 30 = 0 \rightarrow F_{ab} = 30$ کششی

* روش استاتیک ذهنی وقتی قابل استفاده است که در گره ۲ معادله ۲ مجهولی نداشته باشیم.

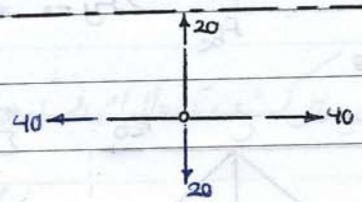
گره B:



گره b:



گره c (کوچک):



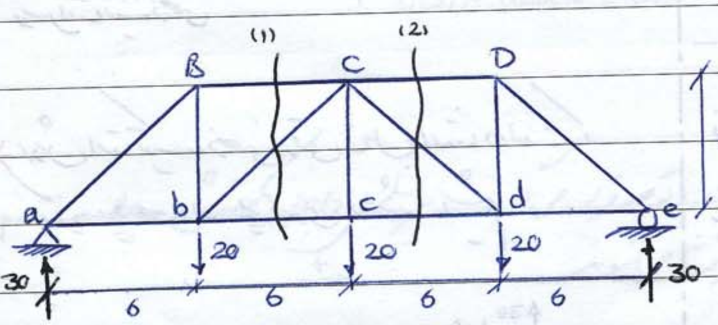
* بقیه اعضا را توسط تقارن می‌توان بدست آورد.

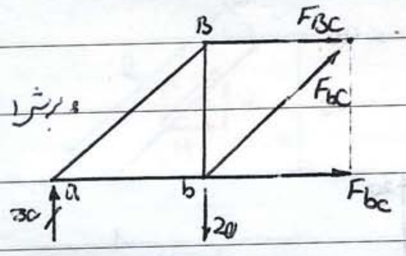
مرکز گشتاور نیرو به نقطه ای گفته می شود که وقتی نسبت به آن ممان می گیریم تنها آن نیرو مجهول باقی بماند.

روش مقطع برای تحلیل خرپاها

برای تحلیل خرپا می توان به کمک مقطع قسمتی از خرپا را از بقیه قسمت ها جدا نمود، معادلات تعادل را بر آن (قسمت جدا شده) اعمال نماییم و نیروهای مجهول اعضای قطع شده را بدست آوریم. مجدداً تاکید می گردد نیروهای مجهول اعضا بصورت کششی فرض گردد و نیروهای معلوم در جهت واقعیشان. همچنین بر قسمت جدا شده می توان سه معادله تعادل اعمال کرد. بنابراین مقطع ها نمی توانند بیش از ۳ عضو مجهول را قطع نمایند. همچنین تذکر داده می شود که در هنگام نوشتن معادلات تعادل از معادلاتی استفاده کنیم که بیش از یک مجهول نداشته باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در مثال قبل را به روش مقطع تحلیل نمایید.

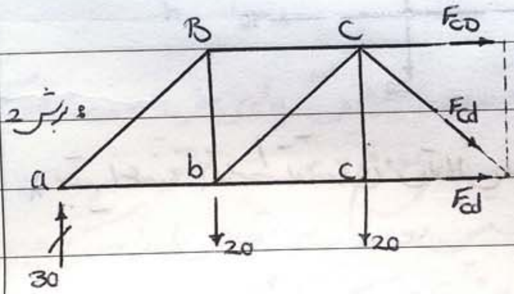




$\Sigma M_b = 0 \qquad -F_{BC}\times 6 - 30\times 60 = 0 \rightarrow F_{BC} = -30\ ton$

مرکز گشتاور F_{BC} در b و مرکز گشتاور F_{bc} در C

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +30 - 20 + V_{bC} = 0 \rightarrow V_{bC} = -10\ ton$

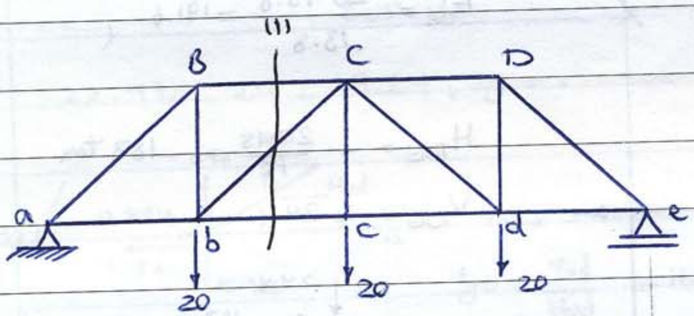


$\Sigma M_C = 0 \qquad F_{cd}\times 6 + 20\times 6 - 30\times 12 = 0 \rightarrow F_{cd} = 40\ ton$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +30 - 20 - 20 + V_{Cd} = 0 \rightarrow V_{Cd} = 10\ ton$

روش نیروی برشی و لنگر خمشی

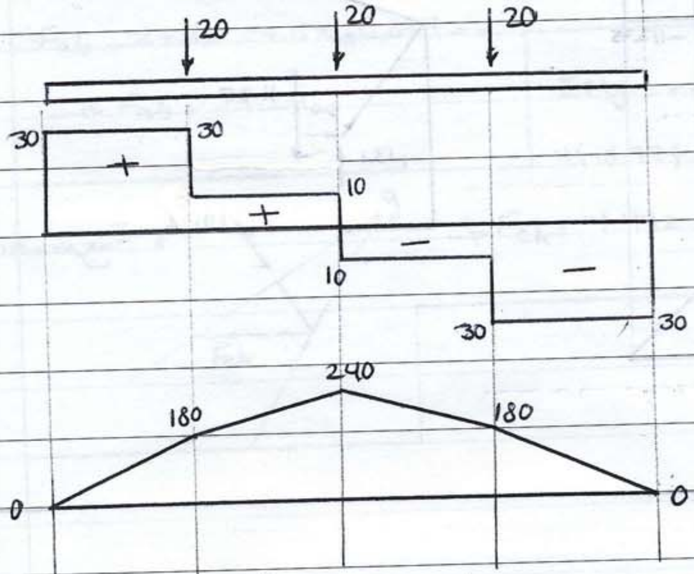
توضیح: این روش در قسمت قبل برای روش مقطع داده شد و یا یک فرمول برای روش نیروی برشی و لنگر خمشی است. این روش در خرپاهایی قابل استفاده است که نیروهای وارد بر آن که فقط در امتداد قائم باشند. در این روش ابتدا تیری معادل خرپا در نظر گرفته شده و برای آن نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می‌گردد. به کمک این دو نمودار خرپا به سرعت تحلیل می‌گردد.



مثال: خرپای نشان داده شده در مثال قبل را به روش نیروی برشی و لنگر خمشی تحلیل کنید.

$$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$$

$$F_{BC} = \frac{180}{6} = -30$$

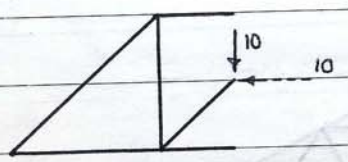


نقطه C (بزرگ) مرکز گشتاور F_{bc} می‌باشد و چون در نمودار لنگر خمشی دارای لنگر 240 می‌باشد و بازوی F_{bc} نسبت به نقطه C (بزرگ) برابر 6 می‌باشد پس:

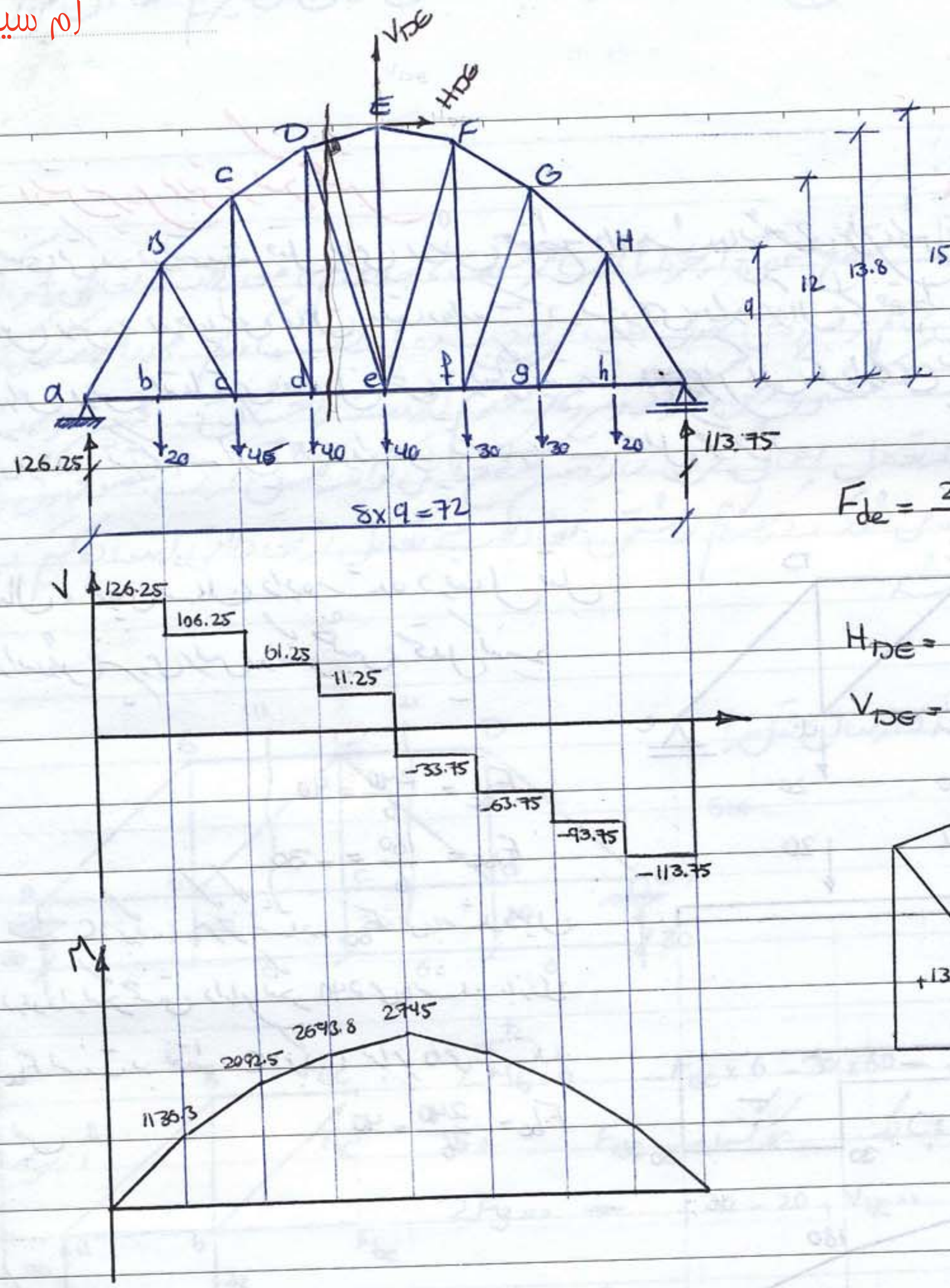
$$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$$

* لنگر مثبت تار پایین را می‌کشد و تار بالا را می‌فشارد.

با استفاده از نمودار نیروی برشی می‌توان مولفه قائم کلیه اعضای قطری را بدست آورد. مقطع (1) را که در آن عضو قطری Cb قطع شده را در نظر می‌گیریم. طبق قرارداد نیروی برشی، همچون در مقطع (1) نیروی برشی مثبت است، پس جهت نیروی برشی مقاوم در مقطع قسمت سمت چپ به سمت پایین می‌باشد. بنابراین مولفه قائم نیروی عضوی قائم Cb نیز به سمت پایین و مساوی 10 تن است.



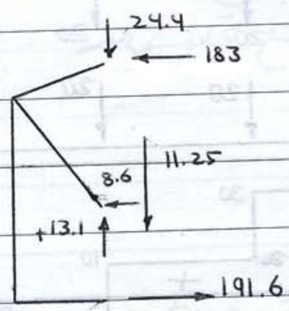
مثال ه خرپای مقابل را تحلیل کنید

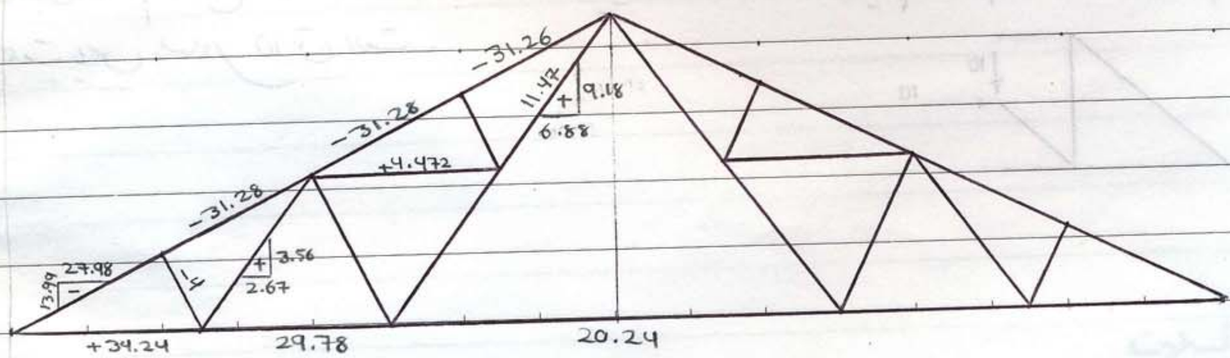


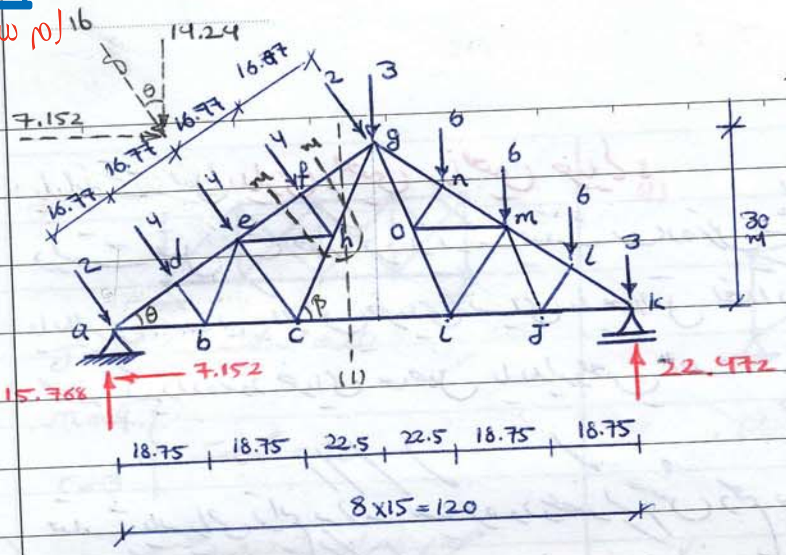
$$F_{de}=\frac{2643.8}{13.8}=191.6$$

$$H_{DE}=-\frac{2745}{15}=-183\ \text{ton}$$

$$V_{DE}=-24.4$$







$tg\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\theta = 0.447$ $\quad C\theta = 0.89$

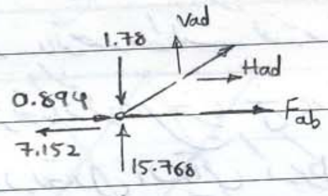
مثال:

$\Sigma M_a = 0$

$\to 4(16.77) + 4(2\times 16.77) + 4(3\times 16.77) + 2(4\times 16.77) + 3(4\times 15) + 6(5\times 15) + 6(6\times 15) + 6(7\times 15) + 3(8\times 15) = 8\times 15\, k_y$ $\quad k_y = 22.472$

$22.472 - 24 - 14.24 + a_y = 0 \to a_y = 15.768$ $\quad a_x = 7.152$

گره a:



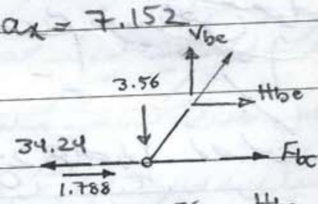
$V_{ad} = -13.99$

$tg\theta = \frac{V_{ad}}{H_{ad}} \to H_{ad} = -27.98$

$F_{ab} - 27.98 - 7.152 + 0.894 = 0$

$\to F_{ab} = 34.24$

گره b:



$V_{be} = 3.56$ $\quad \frac{3.56}{15} = \frac{H_{be}}{11.25}$

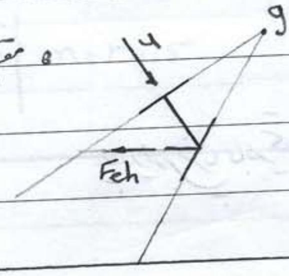
$H_{be} = 2.67$ $\quad F_{bc} = 29.78$

$\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) - F_{eh}(15) = 0$

$\to F_{eh} = 4.472$

m-m مقطع:



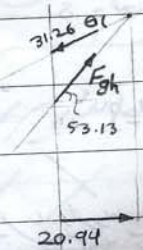
برش 1: $\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) + 4(2\times 16.77) + 4(3\times 16.77) + 2(4\times 16.77) - 7.152(30) - 15.768(60) + F_{ci}(30) = 0$

$\to F_{ci} = 20.24$

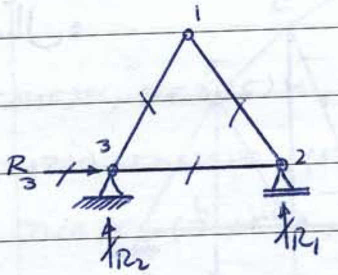
$\Sigma M_c = 0$

$2(2\times 16.77) - 15.768(2\times 18.75) - F_{fg}(16.77) = 0 \to F_{fg} = -31.26$



$F_{gh}(C 53.13) + 20.94 = 31.26(0.89)$

پایداری و ناپایداری، معینی و نامعینی خرپاها:



در قسمت قبل گفته گردید که مثلث ساده‌ترین شکل خرپای پایدار می‌باشد. اگر این خرپای مبنا با حداقل تعداد مولفه‌ها در صفحه تکیه داده شود خرپای حاصل پایدار و معین است.

مثلث پایه را می‌توانیم به کمک یک گره و دو عضو گسترش دهیم بدون آنکه خرپا پایداری و معینی آن تغییر پیدا کند. حال اگر بدون آنکه گره‌ای به خرپا اضافه کنیم، عضوی به خرپا اضافه نماییم، خرپا نامعین خواهد شد. با توجه به مطالب گفته شده می‌توانیم این‌طور نتیجه‌گیری نماییم:

۱) اگر تعداد گره‌های خرپا J باشد تعداد معادلات تعادل استاتیکی 2J خواهد بود. توجه شود که ۳ معادله تعادل استاتیکی که برای کل سازه نوشته می‌شود مستقل از 2J معادله نیست.

۲) اگر m تعداد اعضای خرپا و r تعداد مولفه‌های تکیه‌گاهی باشد، تعداد مجهولات مساوی m+r خواهد شد. می‌توانیم بنویسیم:

تعداد معادلات $= 2J$ تعداد مجهولات $= m+r$

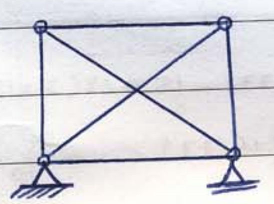
1) $2J > m+r$ خرپا ناپایدار استاتیکی

2) $2J = m+r$ خرپای معین

3) $2J < m+r$ خرپای نامعین

پایداری خرپا باید تحقیق گردد (شرط لازم است ولی کافی نیست)

1)

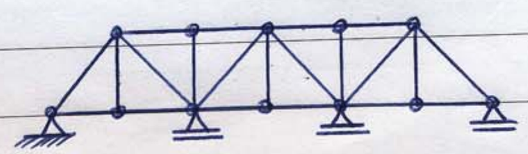


$J=4 \rightarrow$ معادلات $= 8$

$m=6$, $r=3$ $\rightarrow$ مجهولات $= 9$

خرپای پایدار و یک درجه نامعین

2)



$J=12$ $2J=24$

$m=21$, $r=5$ $m+r=26$

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین خارجی

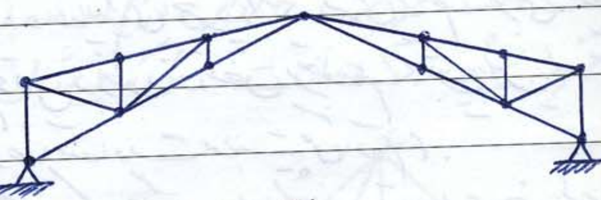
3)

$J=10$ $\quad$ معادلات $=20$

$m=19$
$r=3$ $\}$ مجهولات $=22$

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین

4)

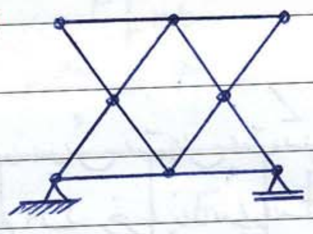


$J=13$ $\quad$ $2J=26$

$m=22$
$r=4$ $\}$ $m+r=26$ $\quad$ خرپای پایدار و معین

دو جسم توسط یک میله و یک مفصل پایدار می شوند ولی اینجا فقط یک مفصل بکار رفته که باعث یک درجه ناپایداری گشته است. برای جبران این ناپایداری به جای 3 مولفه تکیه گاهی از چهار مولفه استفاده شده است.

5)



$J=8$ $\quad$ $2J=16$

$m=12$
$r=3$ $\}$ $m+r=15$ $\quad$ خرپا ناپایدار است.

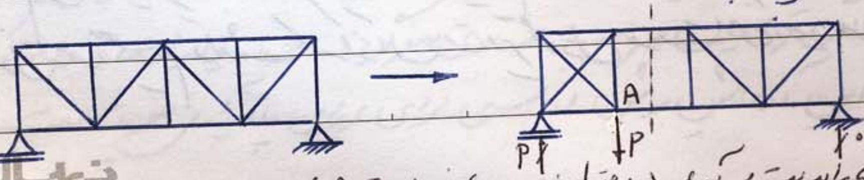
دلایل ناپایداری خرپا :

۱) تعداد معادلات $2J$ بزرگتر از $m+r$.

۲) عدم وجود شکل های مثلثی. اگر در قسمتی از خرپا شکل مثلثی مشخص نشود می تواند نقطه الهامی برای ناپایداری خرپا باشد.

۳) تکیه گاه های ناپایدار نیز می توانند دلیلی بر ناپایداری باشند.

۴) استدلال های استثنایی : اگر بتوانیم ثابت کنیم خرپایی فقط برای یک حالت بارگذاری ناپایدار است می توانیم نتیجه گیری کنیم که آن خرپا ناپایدار است.



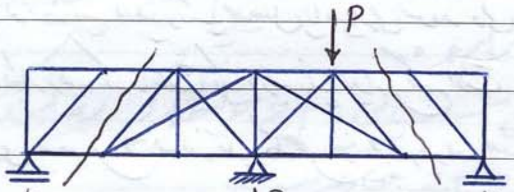
J ، m ، r تغییری نکرد.

بار P را به A وارد می کنیم. تکیه گاه ها را بدست می آوریم. (با مقطع زدن در عضو راست A) سپس $\Sigma M=0$ برقرار نمی باشد.

۵) تحلیل خرپا. اگر نتوانیم با یکی از روش های گفته شده ناپایداری خرپا را نتیجه گیری نماییم، برای تشخیص ناپایداری اقدام به تحلیل خرپا می نماییم. اگر در حین تحلیل به وجود تناقض برخوردیم، معنی این است که خرپا ناپایدار می باشد. (نیروی عضو را از دو راه دو عدد متفاوت بدست می آوریم).
در حالت پیشرفته تر این روش منجر به روش بار صفر می گردد که از آن برای تشخیص ناپایداری خرپاهای مبهم استفاده می شود. در فرصت مناسب مورد بررسی قرار می گیرد.

مثال هایی از استدلال های استاتیکی:

1)



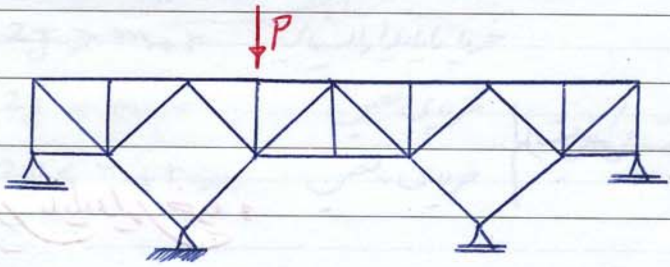
$J=14$ $\neq 0$ $2J=28$ $\uparrow P$ $0 \neq$

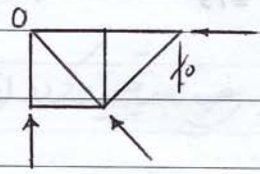
اما با روش استدلال استاتیکی با اعمال بار P مشخص می شود که $\Sigma M \neq 0$ و خرپا ناپایدار است.

$m=25$

$r=4$ $\Big\}\ m+r=29$

2)

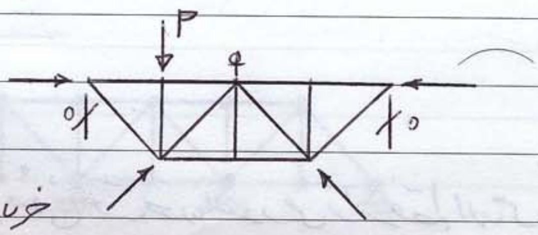




$J=18$ $2J=36$

$m=31$

$r=5$ $\rightarrow \Big\}\ m+r=36$

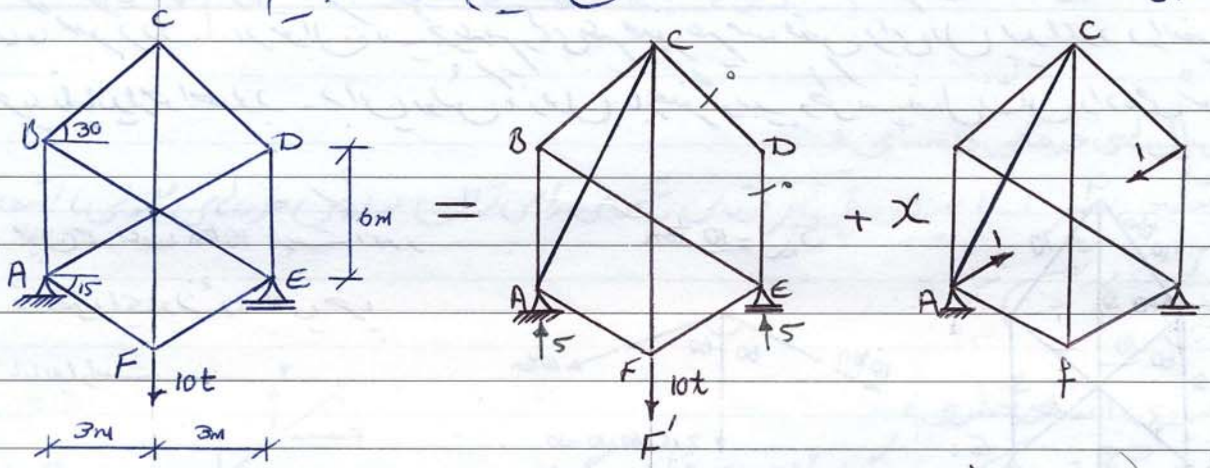


خرپا ناپایدار است.

$\Sigma M_q \neq 0$

تحلیل خرپاهای مبهم: خرپای مبهم را نمی توان با روش گره یا مقطع حل نمود، زیرا نمی توان گره ای با دو مجهول یا مقطعی با سه مجهول در آن پیدا کرد. تنها روش این است که تمام گره های خرپای مبهم را با یکدیگر به طور همزمان آزاد نماییم. در این صورت $2J$ معادله همزمان برای تعیین $m+r$ مجهول خواهیم داشت که از آن مقادیر مجهول بدست می آید. حل این معادلات همزمان ممکن

است وقت‌گیر باشد. روش دوم استفاده از اصل روی هم گذاری است که توسط شخصی به نام هنری بیلیف داده شده است. طی یک مثال به توضیح این روش می‌پردازیم.



	F'	f	$F=F'+xf$
AB	+6.22	−1.382	−26.1
BC	+4.55	−1.01	−19.1
CD	0	−0.816	−19.1
DE	0	−1.115	−26.1
EF	+4.08	−0.91	−17.2
FA	+4.08	−0.91	−17.2
BE	−5.58	+1.24	+23.42
CF	+7.89	+0.471	+18.9
AC	−10.89	+0.465	0

$$F_{AC} = F'_{AC} + x f_{AC} = 0$$

$$-10.89 + 0.465x = 0$$

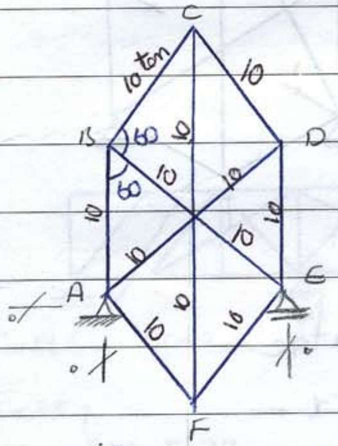
$$x = +23.42$$

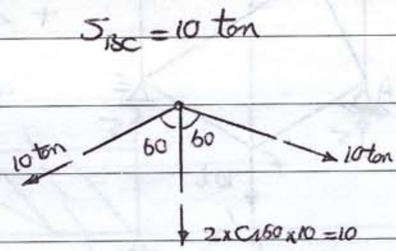
$$F_{AD} = 0 + 1 \times x = 23.42\,t$$

پایداری خرپای مبهم، روش بار صفر

همچنان‌که برای کنترل یک خرپا (هر نوع خرپا) $2j$ معادله تشکیل شود از حل این دستگاه نیروهای مجهول اعضا قابل تعیین خواهد بود. این دستگاه وقتی دارای جواب است که دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد، بنابراین اگر دترمینان ضرایب مساوی صفر گردد، خرپا ناپایدار بوده و دستگاه دارای جواب نمی‌باشد. این آزمایش روش مناسبی برای بررسی پایداری خرپاها است.

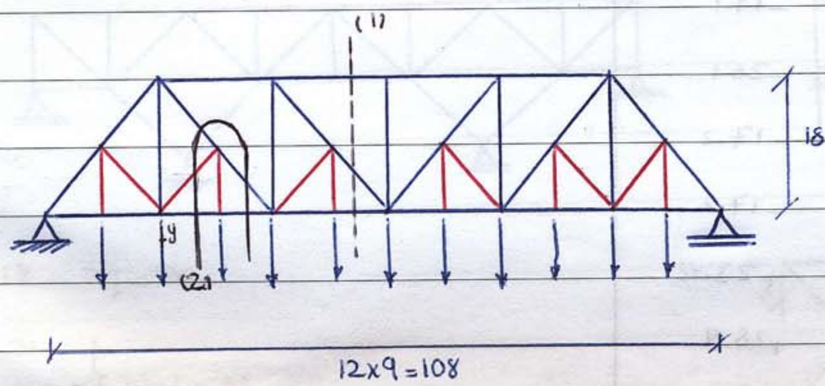
می‌توان به طرق دیگری که قابلیت استفاده عمل داشته باشد بیان نمود. بدین معنا که اگر خرپایی تحت تأثیر هیچگونه بار خارجی نباشد تنها حالت تعادل برای آن این است که نیروهای داخلی آن تماماً صفر گردد. اگر بتوان یک مجموعه نیروهای غیر صفر غیر متناقض برای آن پیدا نمود در این صورت خرپا ناپایدار خواهد بود. در این روش آزمون بار صفر نوشته و یک مثال نشان داده می‌شود.





چون که اعضا 10 ton بدست آمد و تناقض ایجاد شده یعنی خرپا ناپایدار است.

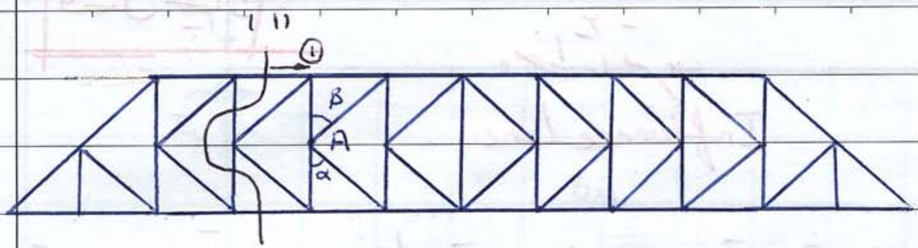
تحلیل خرپای تقسیم شده: تحلیل خرپای تقسیم شده مثل یک خرپای معمولی است. با این تفاوت که باید نیروهای اعضای تقسیم شده را به نحوی تعیین نمود. این کار با یک مقطع امکان‌پذیر است.



برای شکل آیی زیر با مقطع (1) می‌توان از طریق لنگر خمشی و نیروی برشی نیروی اعضای آیی را بدست آورد.

$P \times 9 + y \times 18 = 0 \longrightarrow y = -P/2$

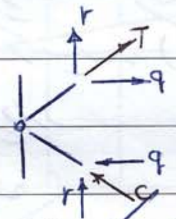
تحلیل خرپای K :



تحلیل یال های فوقانی و تحتانی :

با عبور مقطعی نظیر ۱-۱ نیروی یال های فوقانی و تحتانی را می توان به روش خرپاهای معمولی با استفاده از نقطه گشتاور تعیین نمود.

تعیین نیروی اعضای قطری :



$\alpha = \beta$

نمودار آزاد گره A را می کشیم. اگر زاویه اعضای قطری با هم مساوی باشند برش چشمه به طور مساوی بین مولفه های قائم دو قطری تقسیم خواهد شد. با توجه به شیب مخالف دو قطری اگر در یکی فشاری باشد، در دیگری کششی است.

حمید کاظم

فصل چهارم:

«خط تأثیر»

Influence Line

تا به حال کلیه سازه فقط تحت بارهای با موقعیت ثابت مورد توجه قرار گرفت. بارهای وارد بر یک سازه می توانند متحرک باشند. مثال خوبی از این موضوع پل ها می باشند، که بار زنده وارد بر آن ها کاملاً بارهای خودروهایی است که با سرعت از روی آن عبور می کنند. چنین وضعی را می توان به طور آرام تر در یک ساختمان نیز مشاهده نمود. جابه جا شدن بارهای زنده که یک ساختمان از محلی به محل دیگر نشان دهنده این مدعا است.

مقدار یک تابع مشخص از یک سازه (واکنش تکیه گاهی، نیروهای داخلی و حتی تغییر شکل ها که تابع از سازه می باشد) بستگی به عوامل زیر دارد:

1) مقدار بار وارده

2) موقعیت بار وارده

3) محل مورد نظر برای مطالعه تابع

با یک جمع بندی یک مهندس آلمانی به نام وینکلر (Winkler) ایده ای ابداع نمود که در این گزینه به جای ۳ متغیر با یک متغیر تنها انجام شود.

1) هر بار فقط یک تابع مشخص بررسی شود.

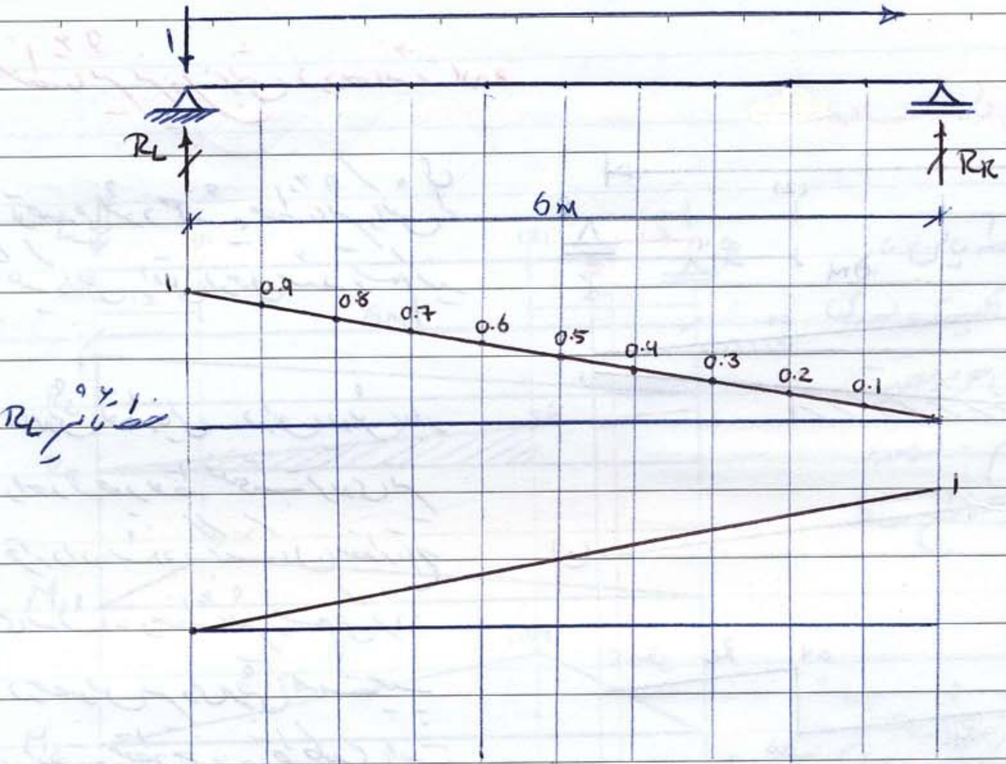
2) مقدار بار را واحد در نظر بگیرید.

3) موقعیت بار واحد می تواند متغیر باشد.

نموداری که تغییرات تابع را برحسب موقعیت بار واحد نشان دهد خط تأثیر نامیده می شود.

رسم خط تأثیر واکنش های تکیه گاهی یک تیر ساده

سازه ترکیبی: روش رسم خط تأثیر نقطه یابی است. یعنی بار واحد را بر روی موقعیت های مختلف از طول سازه اثر می دهیم و در هر موقعیت مقدار تابع را حساب می کنیم و مقدار به دست آمده را به صورت عرض خط تأثیر زیر بار واحد ترسیم می دهیم. با کمی پیشرفت در کار با این توانایی به وجود بیاید که تعداد نقطه یابی ها کم گردد.

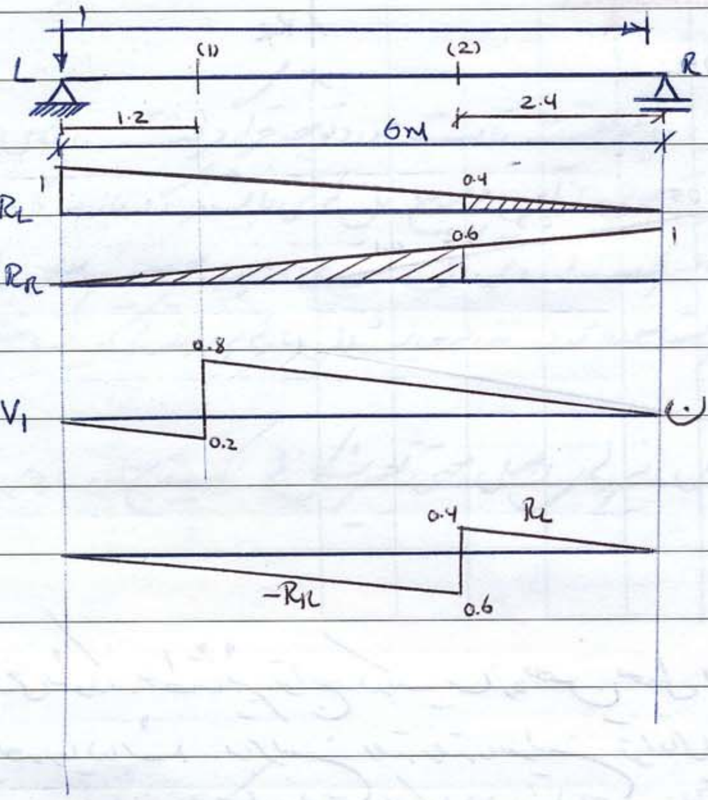


ملاحظه می‌شود که خط تاثیر توابع در یک سازه معین خطی است. بنابراین ضرورتی ندارد که تعداد نقاط مورد مطالعه زیاد باشد. بنابراین به این نکته باید این توانایی بوجود آید که بتوانیم با حداقل نقاط خط تاثیر را رسم نماییم. بعضی نقاط را نقاط کلیدی می‌نامیم. یعنی نقاطی که تشخیص می‌دهیم در آنها ناپیوستگی و تغییر شیب ناگهانی در خط تاثیر بوجود می‌آید که به تجربه نیاز دارد. نقاط ابتدا و انتهای سازه، محل واکنش‌های تکیه‌گاهی، لولاهای داخلی نقاطی هستند که می‌توانند برای ناپیوستگی پتانسیل داشته باشند و باید به عنوان نقاط کلیدی مورد بررسی قرار گیرند.

بعد از رسم خط تاثیر کامل توصیه است که نقاط دیگری به عنوان کنترل توصیه شود. به عنوان مثال برای رسم خط تاثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت راست، یک بار واحد را در نقطه چپ قرار می‌دهیم. واکنش صفر می‌شود. تکیه بار روی واکنش راست می‌گذاریم مقدار واکنش یک می‌شود. با وصل کردن این دو نقطه نمودار کامل می‌شود.

برای کنترل از نقطه دیگر و ΣF_y استفاده می‌کنیم.

خط تأثیر نیروی برشی در دهانه ساده

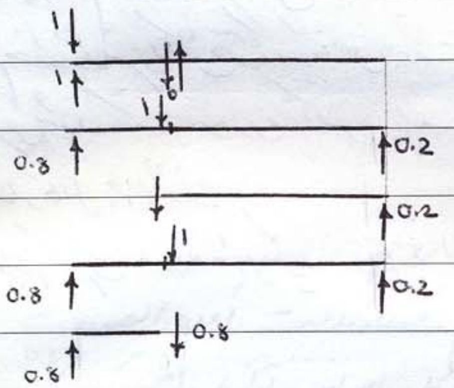


توصیه می‌شود همیشه خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی را قبل از حل مسئله رسم کنید.

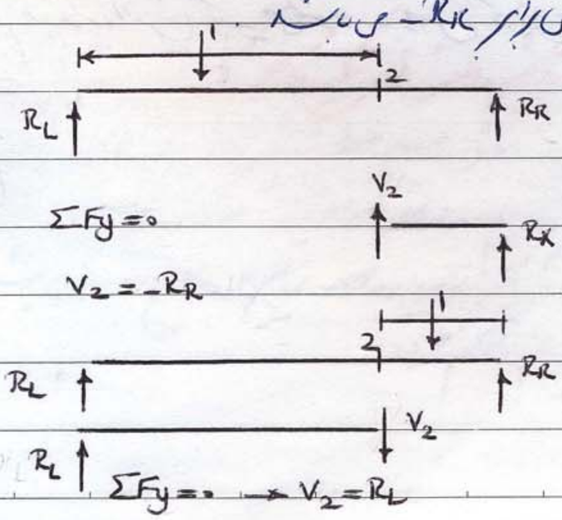
۱) روش نقطه یابی: در این روش بار واحد در چند نقطه مشخص بر روی تیر قرار داده شده و کمیت آن مقدار تابع محاسبه شده و خط تأثیر رسم می‌گردد. در خصوص نیروی برشی سمت چپ و راست مقطع جزو نقاط کلیدی است و بار واحد باید در آن نقاط قرار داده شود.

برای رسم خط تأثیر نیروی برشی مقطع 2 از روش استدلال استاتیکی استفاده می‌نماییم.

این روش می‌تواند در بسیاری از مسائل بکار گرفته شده و باعث سهولت در حل مسائل گردد. در روش استدلال استاتیکی، خط تأثیر مورد نظر را به خطوط تأثیری که قبلاً رسم شده‌اند مربوط می‌نماییم.



مادامی که بار واحد در سمت چپ نقطه 2 قرار دارد نیروی برشی برابر $-R_R$ می‌باشد



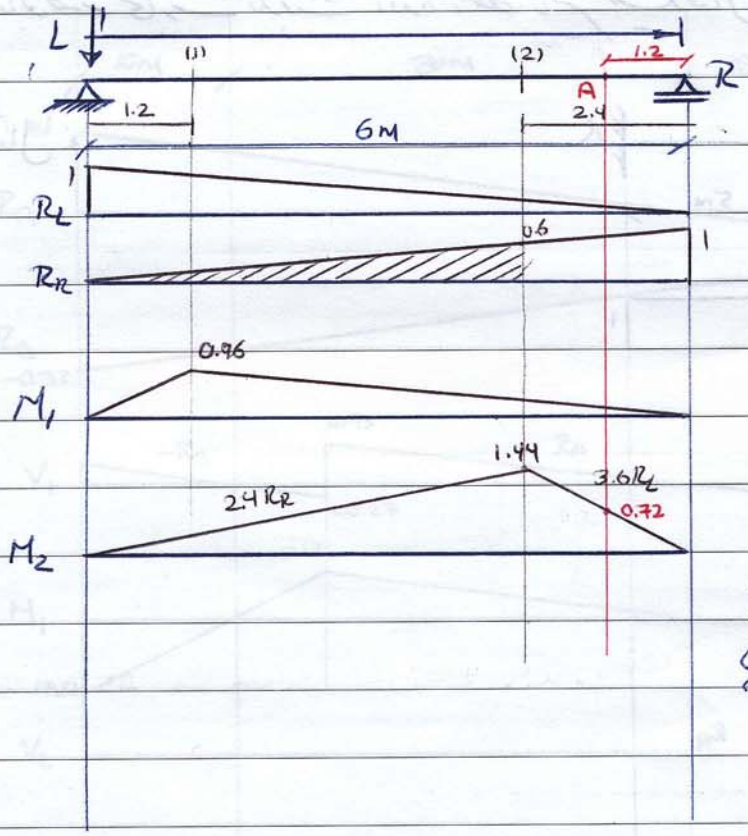
$\Sigma F_y = 0$

$V_2 = -R_R$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_2 = R_L$

* بار واحد هر طرف مقطع مورد بررسی بود برای طرف دیگر رابطه تعادل (استدلال استاتیکی) بنویسید.

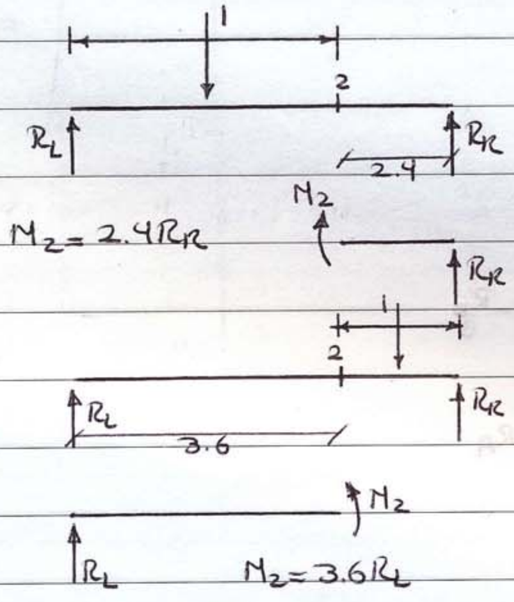
خط تاثیر لنگر خمشی برای دهانه ساده:



۱) نقطه‌یابی: در روش نقطه‌یابی بار واحد را در روی چند نقطه کلیدی در روی سازه قرار می‌دهیم و به ازای هر موقعیت مقدار تابع را محاسبه می‌کنیم. در مورد لنگر خمشی تکیه‌گاه‌ها و محور مقطع نقاط کلیدی می‌باشند.

۲) استدلال استاتیکی: در این روش خط تاثیر مورد نظر به توابعی مربوط است که خط تاثیر آنها قبلاً رسم شده است. بهترین توابع واکنش‌های تکیه‌گاهی اند.

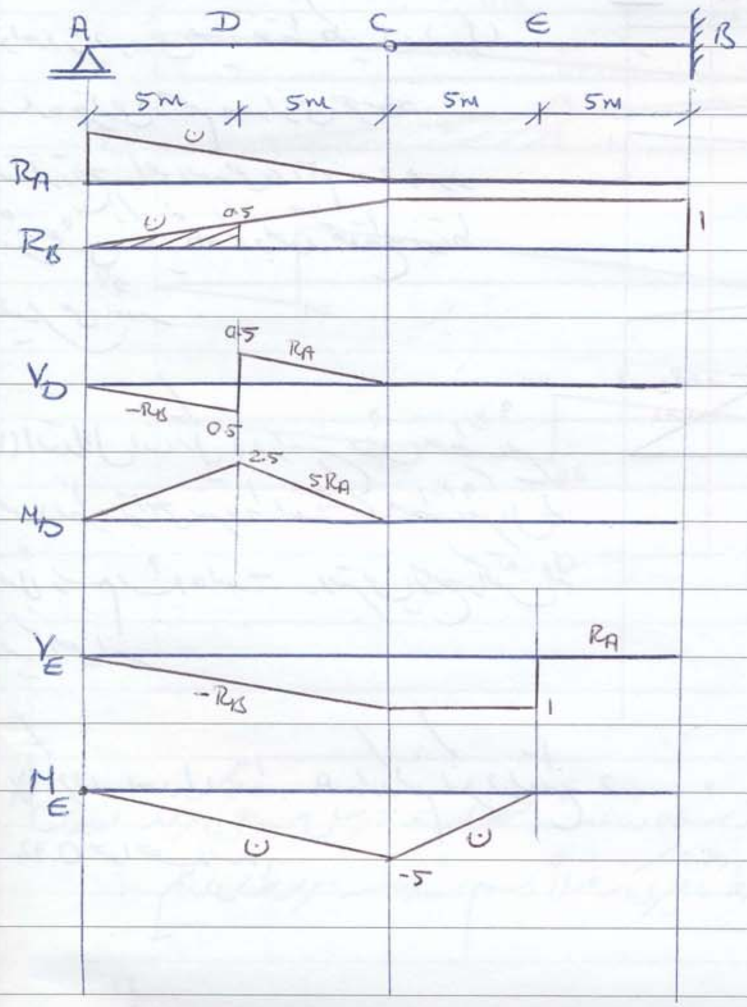
* اگر بار واحد را در نقطه A وارد کنیم لنگر در مقطع 2 0.72 خواهد شد.

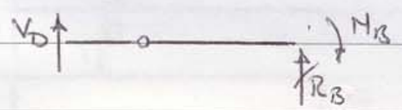


خطوط تأثیر برای تیرهای با مفاصل داخلی کاملاً متفاوت است

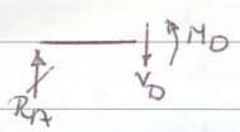
با توجه به نتایج به دست آمده، خطوط تأثیر چند مثال ارائه می گردد.

مثال ۱:

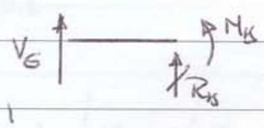




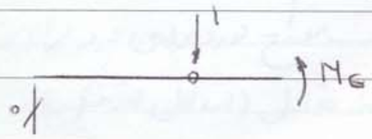
$V_D = -R_B$



$V_D = R_A$ $M_D = 5R_A$

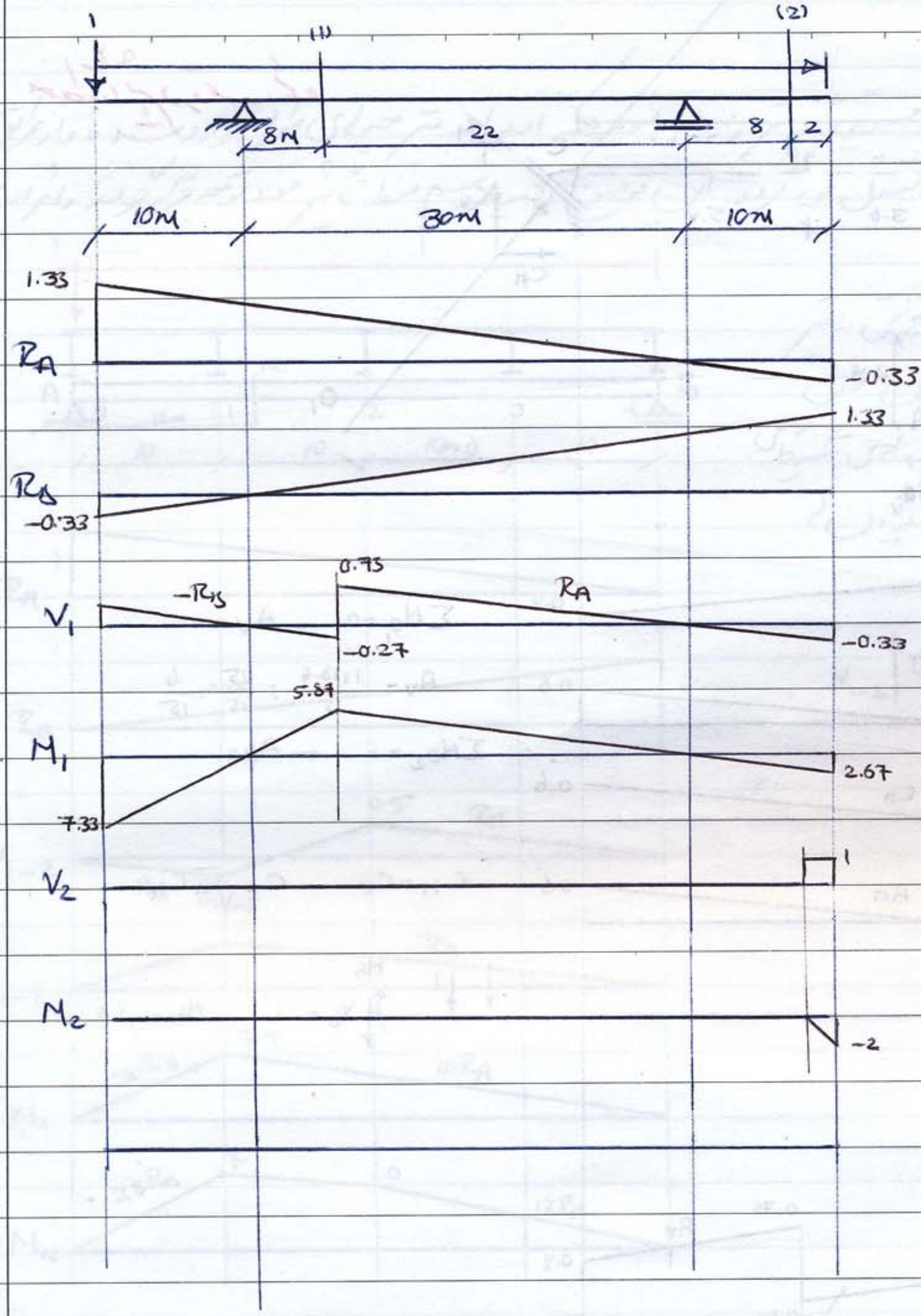


$V_E = -R_B$



$M_E = -5$

مثال ۲:



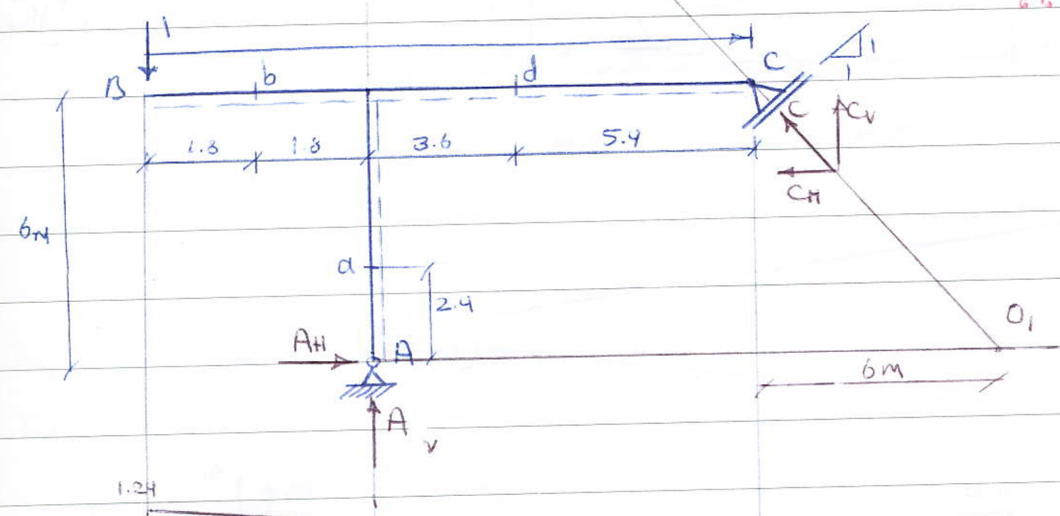
$V_1 = -R_B$ $\quad$ $M_1 = +22R_B$

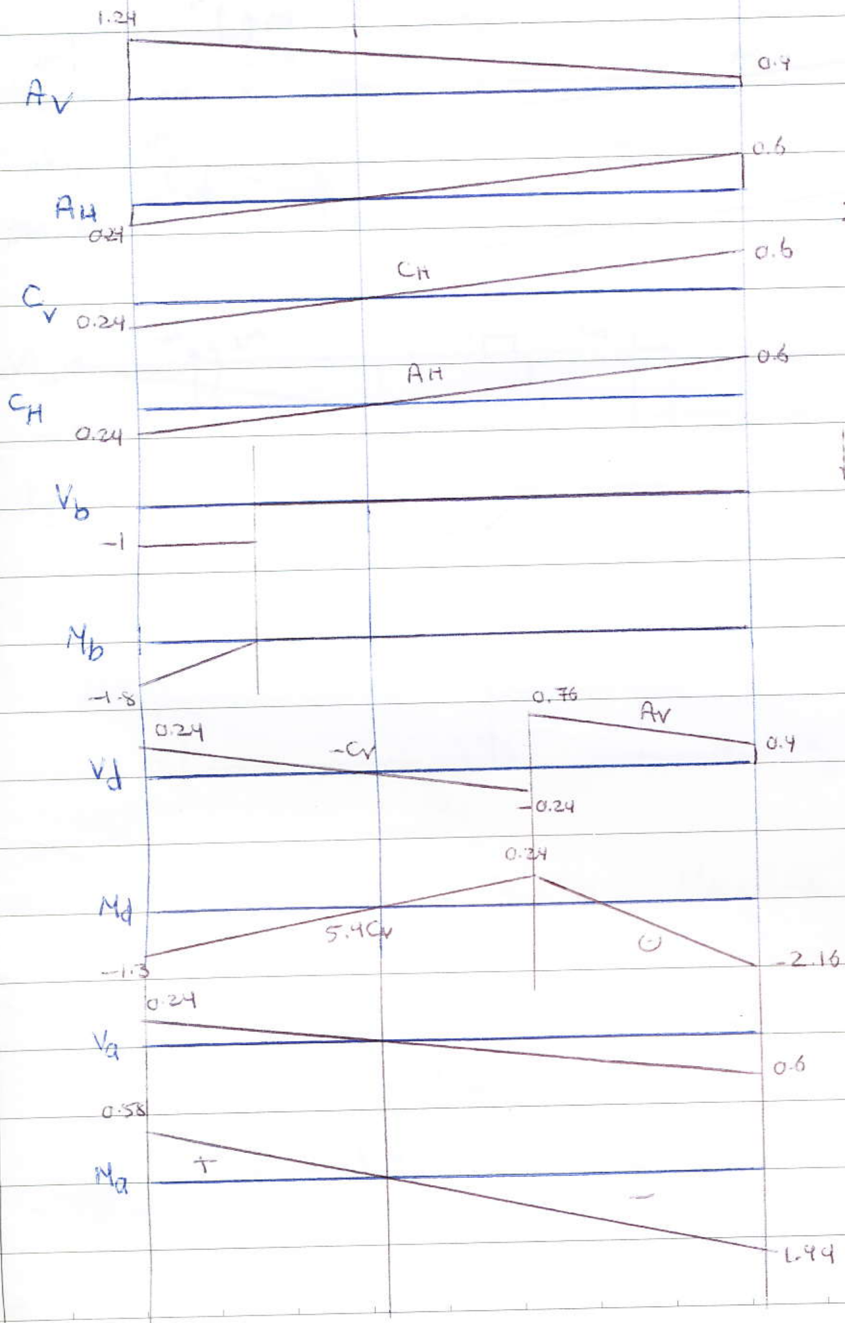
$V_1 = R_A$

$M_1 = 8R_A$

$M_2 = V_2 =$

خط تاثیر در قاب‌ها ۹۶-۱



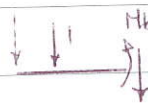


$\Sigma M_{O_1} = 0 \longrightarrow A_V =$

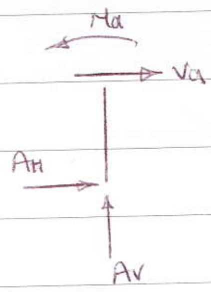
$A_V = \frac{1 \times 18.6}{15} \; , \; \frac{15}{15} \; , \; \frac{6}{15}$

$\Sigma M_{O_2} = 0 \longrightarrow A_H =$

$C_H = C_V \qquad C = \sqrt{2}\, C_H$



$V_b = -1 \qquad M_b = -1.8$

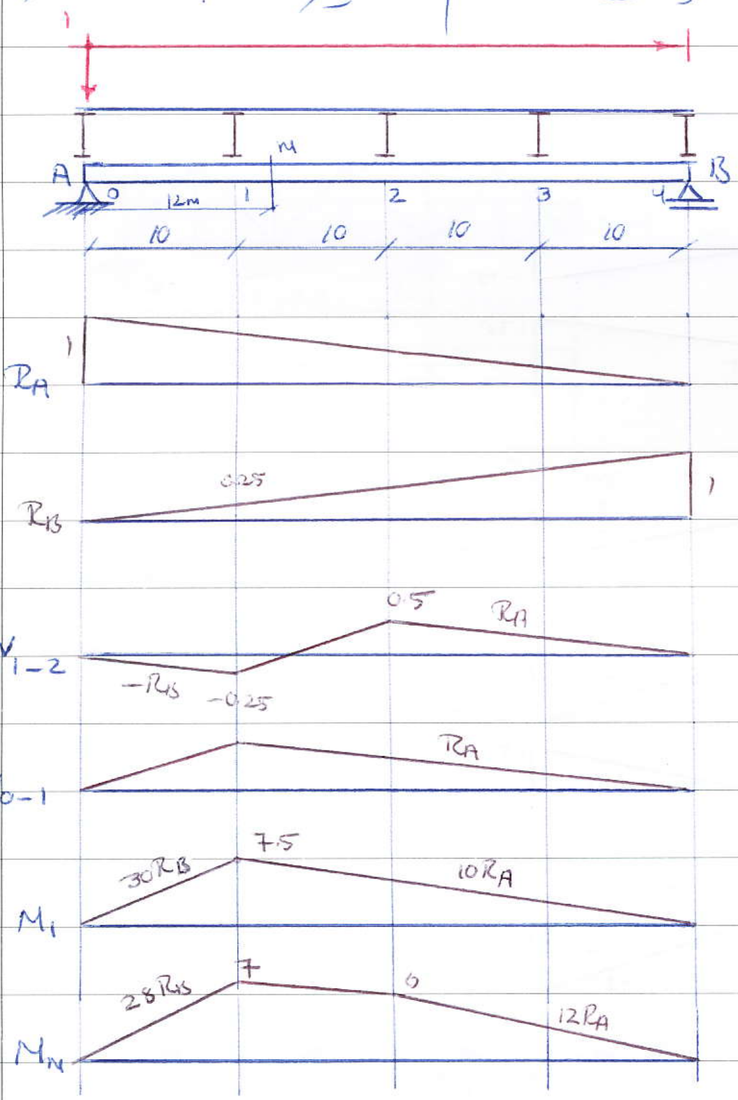


$V_a = -A_H$

$M_a = -2.4 A_H$

خط تأثیر تیرهای اصلی :

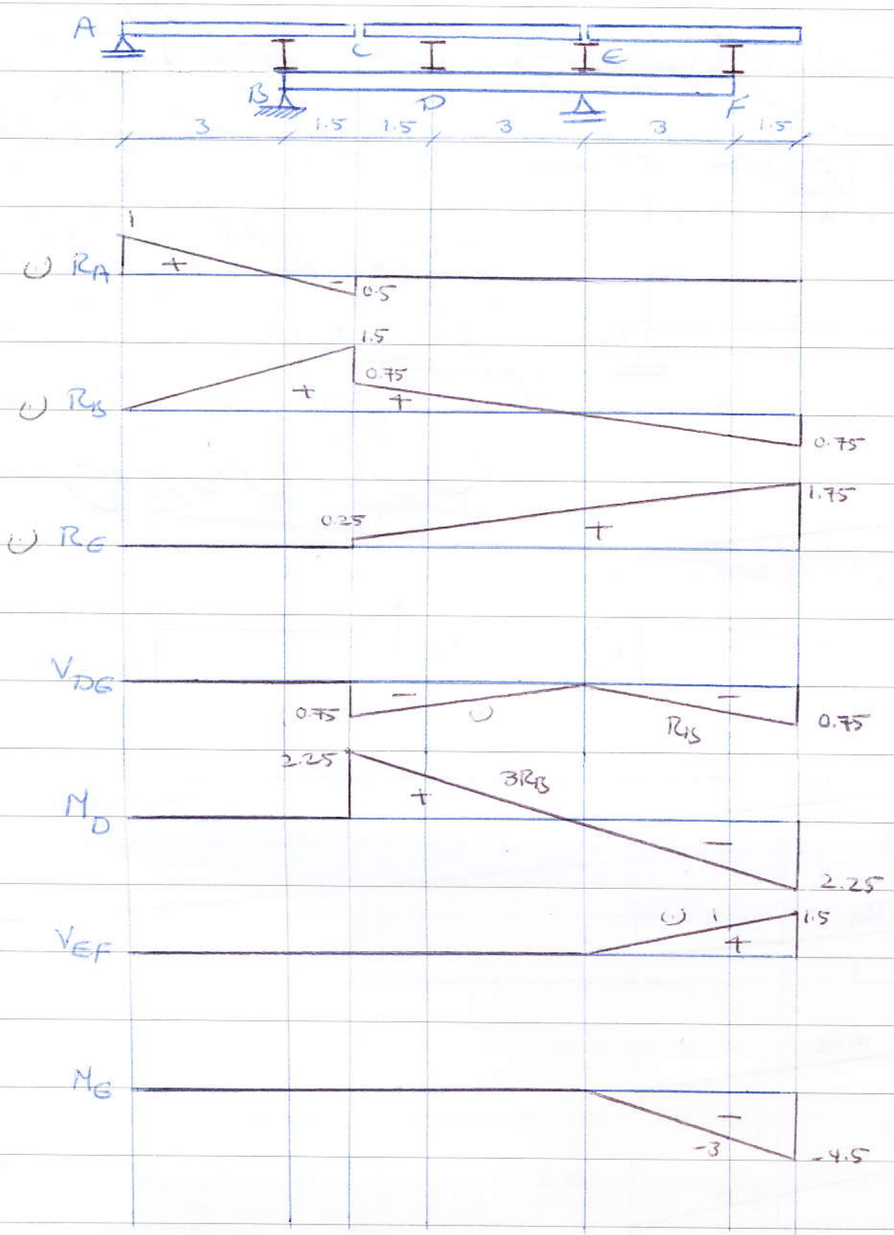
در تیرهای اصلی، بار واحد مستقیماً به تیر وارد نمی‌شود بلکه ابتدا به تیرچه‌های طولی وارد شده و از طریق تیرهای عرضی و گره‌ها به تیر اصلی منتقل می‌گردد. این موضوع باید در رسم خط تأثیر مورد توجه قرار گرفته و اثرات آن دیده شود.



خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی، فرقی با تیر معمولی مشابه آن ندارد، چون طبق اصل استاتیک، در تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی به جای چند نیرو می‌توان از برآیند آن‌ها استفاده کرد.

* در تیرهای اصلی برش در هر چشمه یک عدد ثابت می‌باشد.

** از خط تأثیر تک نقطه‌ای درون چشمه را خواستند هر طرف که بار واحد بود طرف دیگرش را در نظر گرفته و ΣM می‌نویسیم. سپس نمودار خط تأثیر را مثلاً برای سمت چپ از ابتدای سمت چپ تیر تا تیر عرضی سمت چپ رسم می‌کنیم و وارد چشمه نمی‌شویم. برای سمت راست هم چنین کاری را انجام می‌دهیم و سپس دو نقطه در تیر عرضی چپ و راست را به هم وصل می‌کنیم.



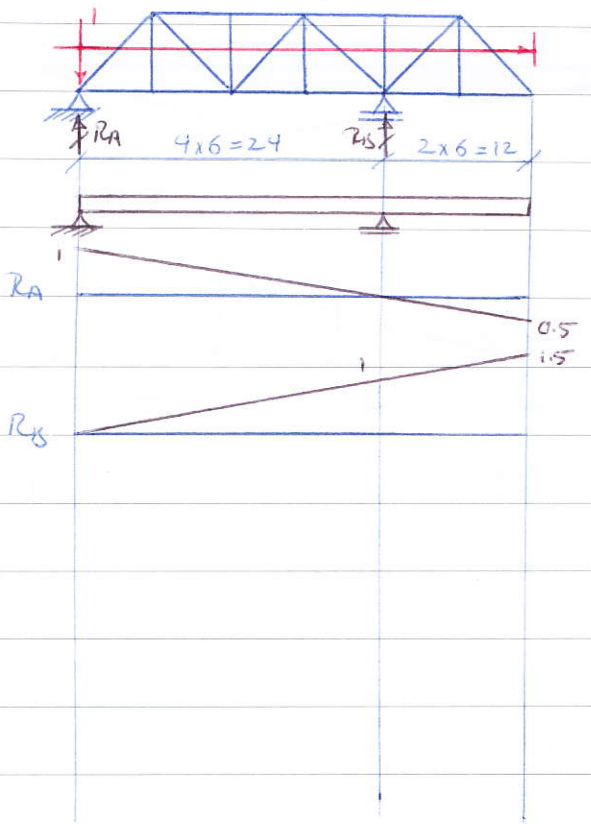
A
B
C
D
E
F
3
1.5
1.5
3
3
1.5
R_A
1
0.5
R_B
1.5
0.75
0.75
R_E
0.25
1.75
V_{DG}
0.75
0.75
R_B
M_D
2.25
$3R_B$
2.25
V_{EF}
1
1.5
M_G
-3
-4.5

٤٨

۱-۶) خطوط تأثیر خرپاها:

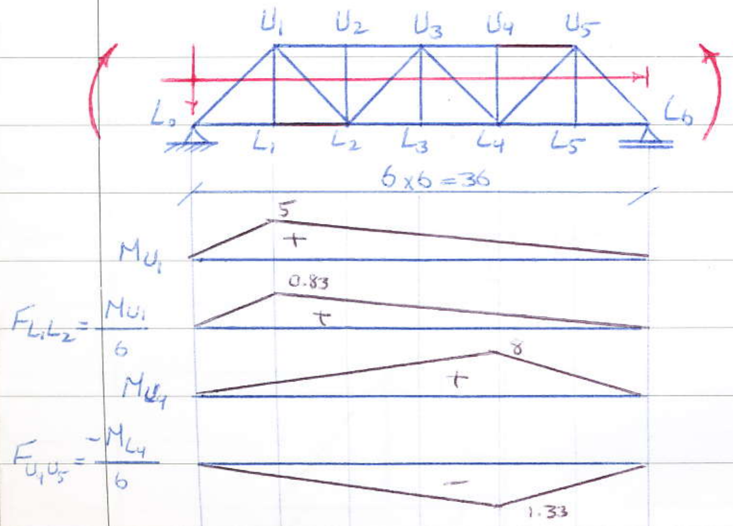
۱) واکنش های تکیه گاهی: خط تأثیر این واکنش ها همانند خط تأثیر واکنش های تکیه گاهی تیر معادل با خرپا می باشد، زیرا بارهایی که به خرپا وارد می شوند در محل گره ها است می توان به همین خطوط تأثیر واکنش ها برای این نیرو استفاده نمود.

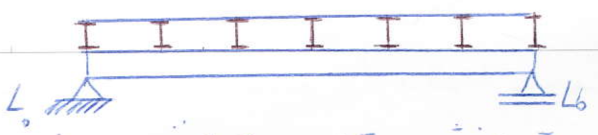
۲) خط تأثیر نیروهای داخلی در خرپاها با بال های موازی:



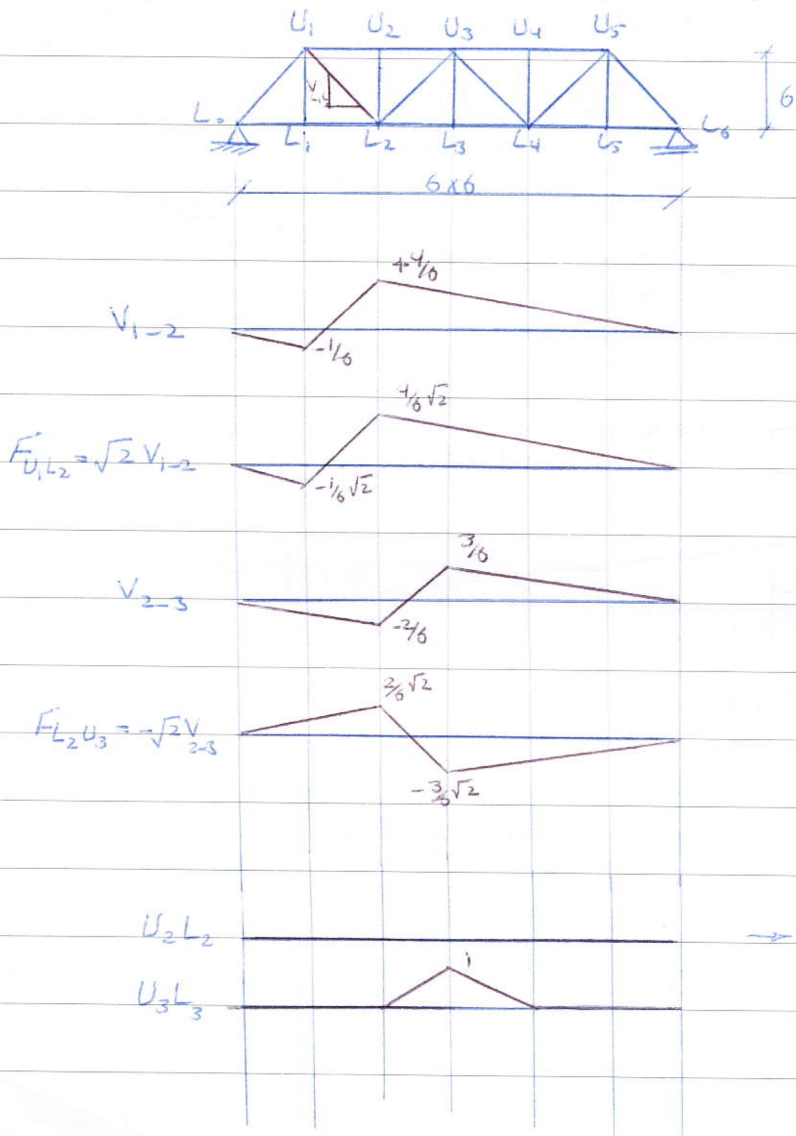
۲) خط تأثیر نیروهای داخلی در خرپاها با بال های موازی:

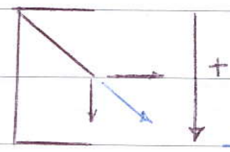
تیر اصلی هم ارز خرپا در نظر می گیریم. با برش گشتاور حول U_1 می توان نیروی L_1L_2 را یافت. برای رسم خط تأثیر L_1L_2 باید به این نکته توجه کنیم که نیروی این عضو برابر است با گشتاور U_1 تقسیم بر 6 متر. حال اگر یک تیر اصلی معادل خرپا در نظر گرفته و برای آن M_{U_1} بدست می آوریم می توانیم خط تأثیر را براساس آن رسم کنیم.



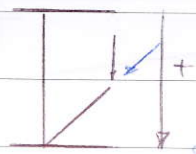


* چون تار بالا فشاری است پس $F_{U_4U_5}$ منفی می باشد.





کشش مثبت

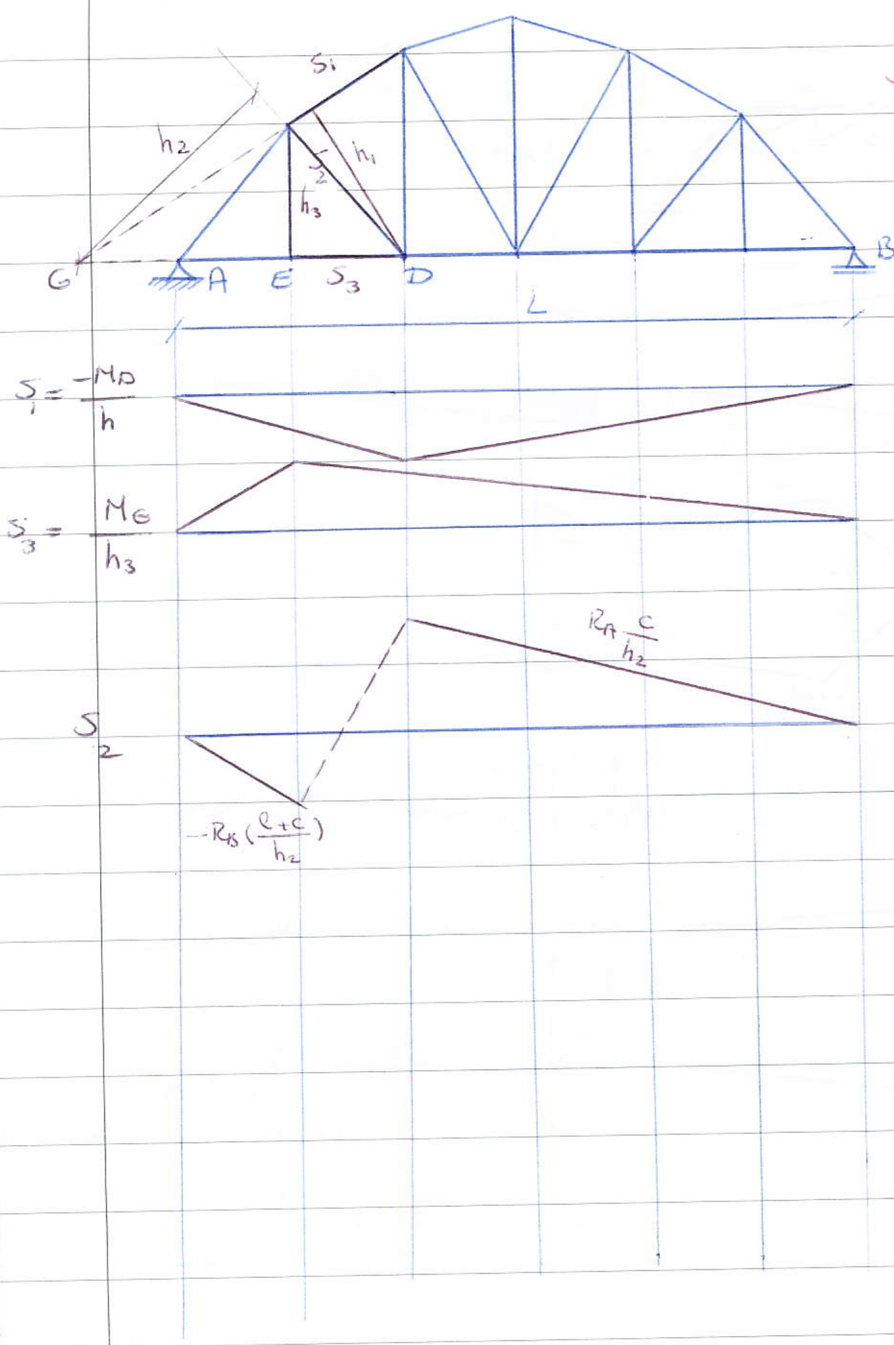


فشار منفی

→ بدون نیرو است

۱-۴-۵ خط تأثیر خرپا با بال های غیر موازی :

مرکز لنگر S_2 ، G است.



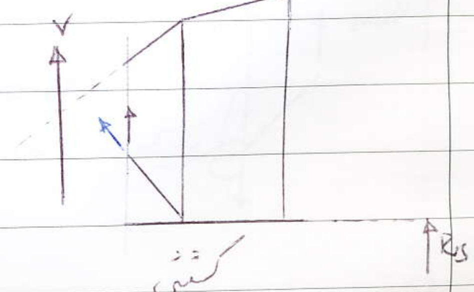
$$S_2 h_2 + R_B(l+c) = 0$$

$$S_2 = -R_B \frac{l+c}{h_2}$$

$$R_A c = h_2 S_2 \rightarrow S_2 = R_A \, c/h_2$$

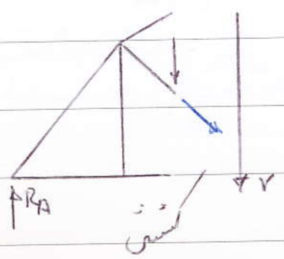
درمحاسبه S_2 :

برای بار واحد بین A تا E داریم:



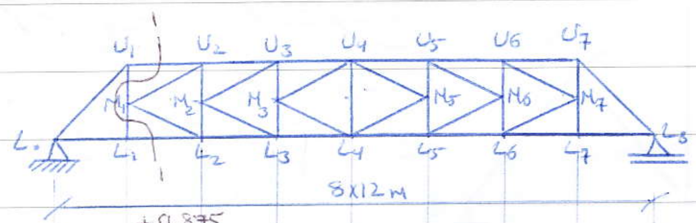
$$+S_2 h_2 + R_B(l+c) = 0$$

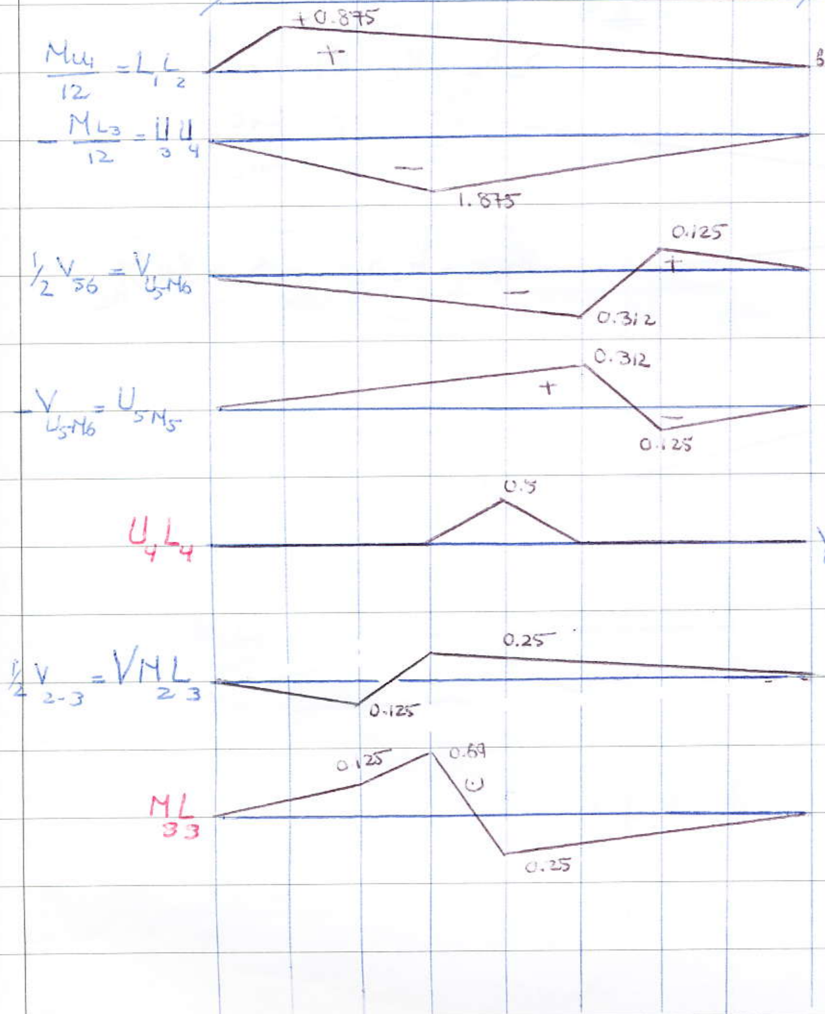
برای بار واحد بین D تا B داریم:

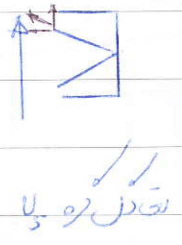


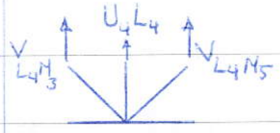
$$-S_2 h_2 + R_A c = 0$$

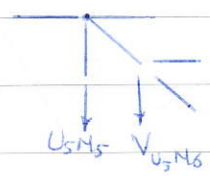
خطوط تأثیر خرپای K





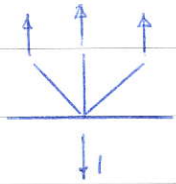






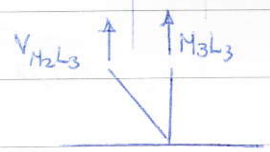
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow U_4L_4 = -(V_{L_4M_3} + V_{L_4M_5}) = 0$$

که از بار واحد صرفنظر می‌شود



$$U_4L_4 = -(V_{L_4M_3} + V_{L_4M_5}) + 1$$

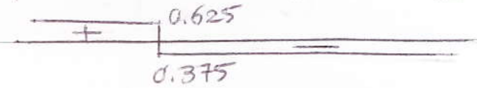
$$= -(0.25 + 0.25) + 1 = 0.5$$

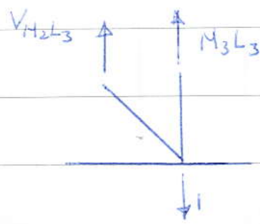


$$M_3L_3 = -V_{M_2L_3}$$

برای L_3 بار واحد را قرار می‌دهیم

$$V_{L_4M_3} = -\frac{0.375}{2} \qquad V_{L_4M_5} = +\frac{0.375}{2}$$



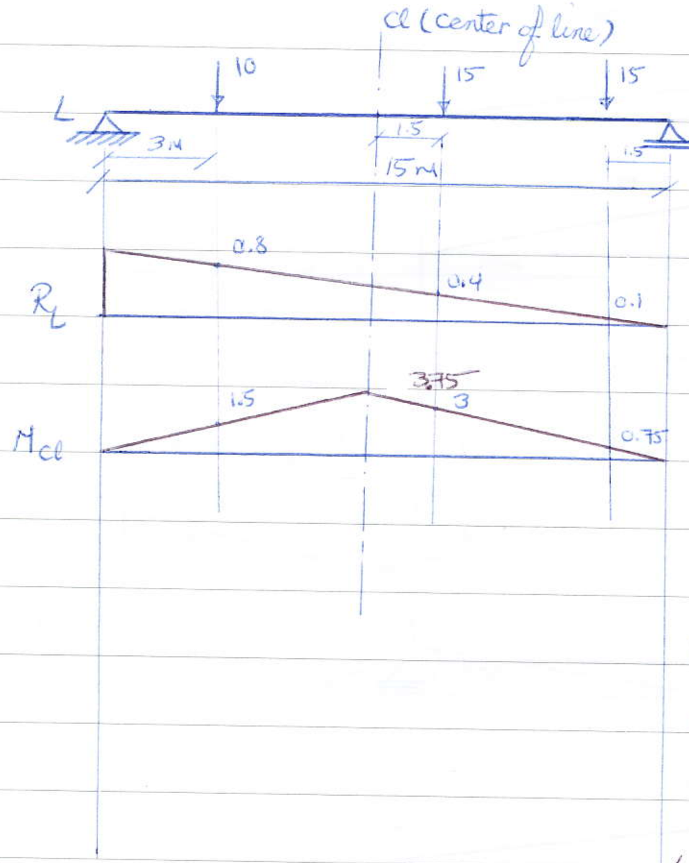


$$M_3L_3 = 1 - V_{M_2L_3}$$

$$= 1 - 0.3125 = 0.69$$

کاربرد خطوط تأثیر

۱) کاربرد خطوط تأثیر برای نیروهای با موقعیت ثابت:



اگر بار واحد در فاصله 3 متری از چپ باشد:

$R_L=0.8$ $\qquad$ $M_{cl}=1.5$

اگر بار 10 باشد:

$R_L=0.8\times10$ $\qquad$ $M_{cl}=1.5\times10$

اگر بار 15 را هم در سمت راست اضافه کنیم:

$R_L=0.8\times10+0.1\times15$

$M_{cl}=1.5\times10+0.75\times15$

اگر بار هم 15 را در 1.5 متری از cl وارد کنیم:

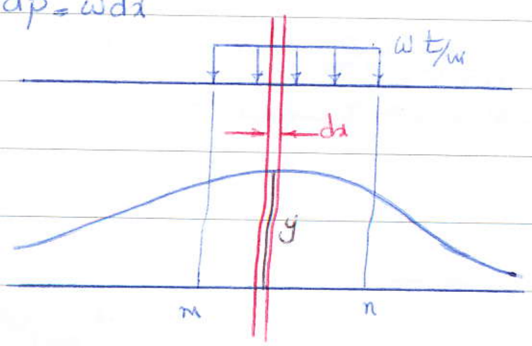
$R_L=0.8\times10+0.1\times15+15\times0.9=15.5\ ton$

$M_{cl}=1.5\times10+0.75\times15+15\times3=71.25$

مقدار تابع در علت بار متمرکز $=\sum P_i y_i$ $\qquad$ y_i: عرض خط تأثیر در زیر بار متمرکز

۲) کاربرد خطوط تأثیر برای بارهای گسترده یکنواخت:

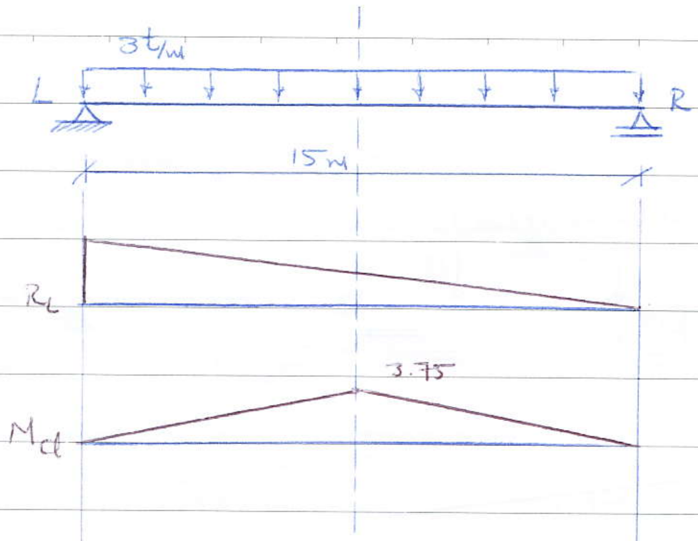
$dp=w\,dx$



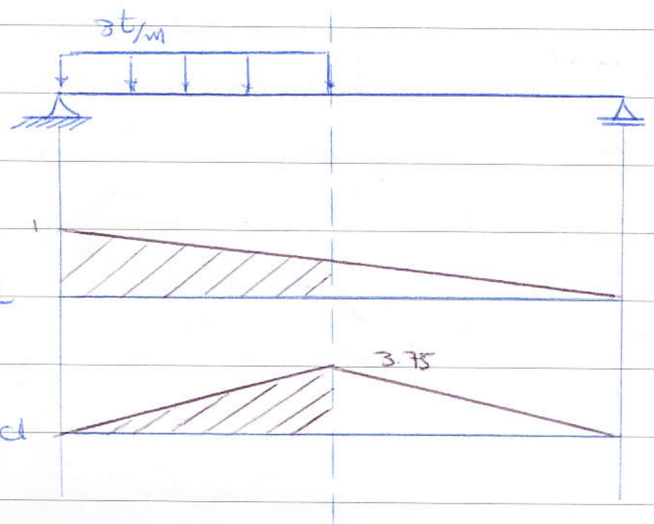
$dF=(w\,dx)y$

$F=\int_m^n w\,dx\,y=w\int_m^n y\,dx=w$ (سطح زیر منحنی خط تأثیر بین m, n)

سطح زیر نمودار خط تأثیر در محدوده محل بار گسترده × شدت بار گسترده = مقدار تابع در علت بار گسترده یکنواخت



$R_L = 3\left(\frac{1}{2} \times 15 \times 1\right) = 22.5$ ton $\qquad M_{cl} = 3 \times 15 \times \frac{3.75}{2} = 84.4$ ton.m



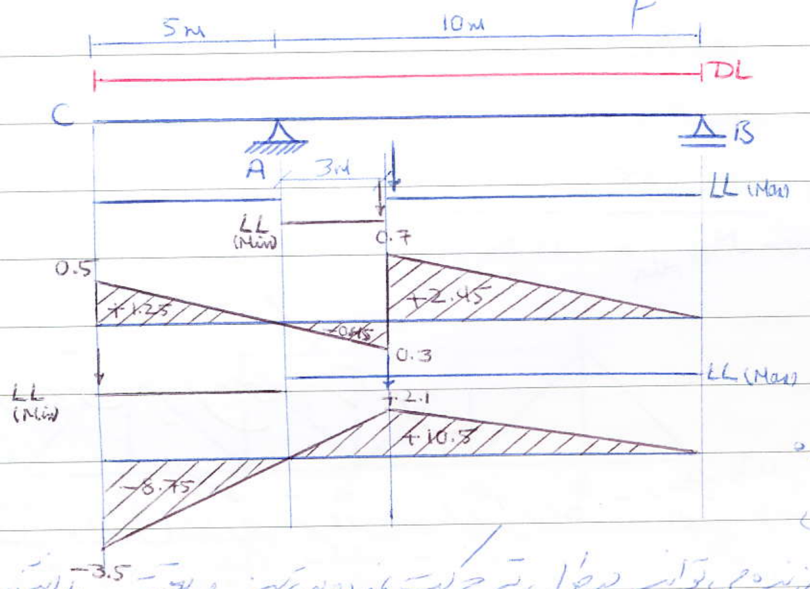
$R_L = 3 \times \frac{1}{2} \times 7.5\,(1 + 0.5) = 16.9$ ton $\qquad M_{cl} = 3 \times 7.5 \times \frac{3.75}{2} = 42.2$

۳) کاربرد خطوط تأثیر برای بارها با موقعیت متغیر:

در هنگام استفاده از خط تأثیر برای بارها با موقعیت متغیر ابتدا باید موقعیت نامساعد بار معلوم گردد و سپس به ازای این موقعیت نامساعد مقدار تابع محاسبه می‌شود.

موقعیت نامساعد موقعیتی است که باعث ایجاد حداکثر و حداقل تابع گردد. منظور از حداکثر، حداکثر مثبت و منظور از حداقل، حداکثر منفی است.

برای نشان دادن موضوع از مثالی استفاده می‌کنیم



۱) بار مرده گسترده یکنواخت $1\,t/m$

۲) بار زنده متمرکز سیار 10 تن

۳) بار زنده گسترده سیار $5\,ton/m$

توضیح: بار مرده همواره در تمام طول سازه قرار دارد. تغییر مکان یا حذف شدن آن امکان‌پذیر نیست. اما بار زنده می‌تواند در طول تیر حرکت نموده و بدترین موقعیت را اشغال نماید و در مورد بار گسترده می‌توان در قسمت‌هایی آن را حذف نمود. با این حقیقت حالا برمی‌گردیم به $V_{D\,Max}$.

$V_{D_{Max}}$:

اثر بار مرده: $= 1(1.25 - 0.43 + 2.45) = 3.25\,t$

بار زنده گسترده $= 5(1.25 + 2.45) = 18.5$

زنده متمرکز $= 10 \times 0.7 =$

$$\Longrightarrow V_{D_{Max}} = 28.75\,t$$

$V_{D_{Min}}$:

اثر بار مرده $= 3.25$

بار زنده متمرکز $= 3(-0.45) = -2.25$

بار گسترده متمرکز $= -0.3 \times 10 = -3$

$$\Longrightarrow V_{D_{Min}} = -2\ ton$$

بار زنده گسترده: Live Load (LL)

بار مرده گسترده: Dead Load (DL)

* $M_{D_{Max}}$:

بار مرده $= 1(-8.75 + 10.5) = 1.75$

بار زنده گسترده $= 5 \times 10.5 = 52.5$

بار زنده متمرکز $= 10 \times 2.1 = 21$

$\Longrightarrow M_{D\,Max} = 75.25 \; t.m$

$M_{D_{Min}}$:

بار مرده $= 1.75$

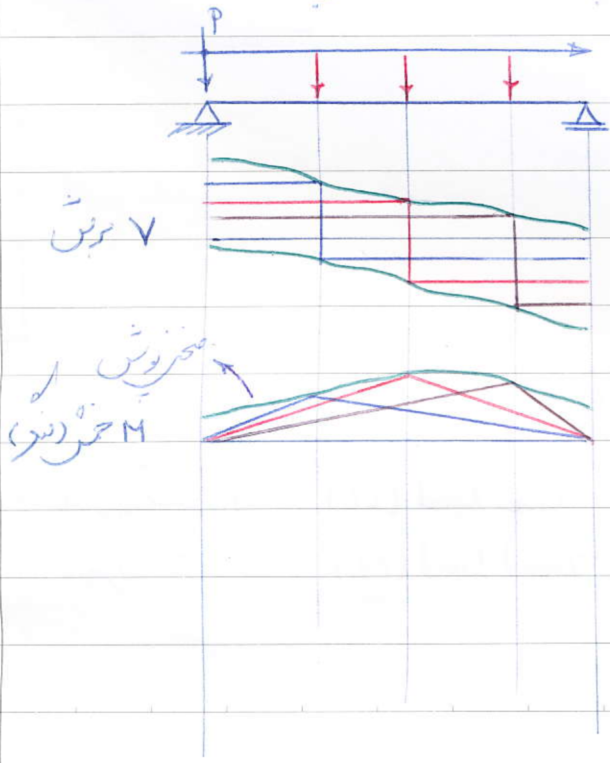
بار زنده گسترده $= -43.75$

بار زنده متمرکز $= -35$

$\Longrightarrow M_{D_{Min}} = -77 \; ton.m$

منحنی پوش نیروی برشی و لنگر خمشی :

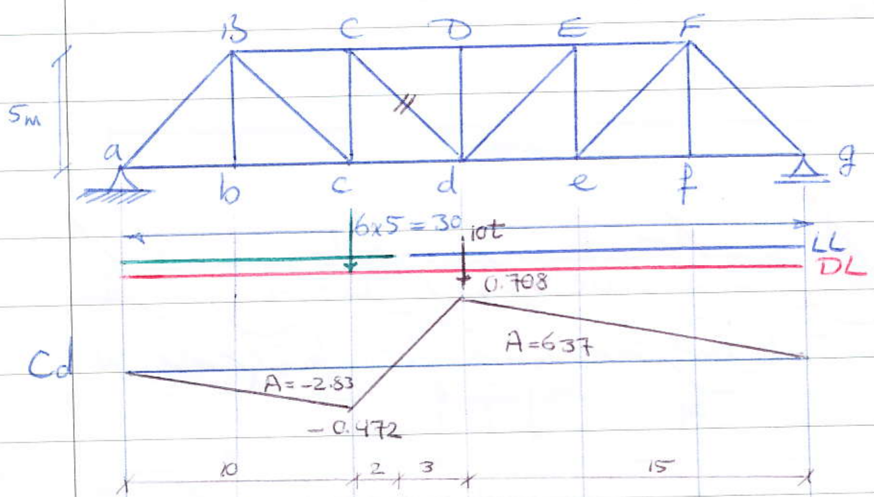
وقتی که بارهای وارد بر یک تیر یا قاب از نظر موقعیت ثابت باشند برای طراحی از نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی استفاده می‌شود که در فصول گذشته مورد تشریح قرار گرفتند. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بارهای وارد بر سازه متحرک باشند معیار طراحی باید چه باشد؟ مثال کوچکی برای درک مطلب ارائه می‌گردد.



روش عملی برای رسم منحنی پوش این است که در دو انتهای چند نقطه منتخب در نظر بگیریم. تعداد این نقاط بین چهار نقطه تا هشت نقطه در هر دهانه کفایت می‌کند. برای این نقاط باید خطوط تاثیر نیروی برشی و لنگر خمشی رسم گردد. سپس با بارهای مرده و زنده در این خطوط تاثیر اعمال شده و حداقل و حداکثر جواب در این نقاط مشخص می‌گردد. با وصل کردن نقاط حداقل به یکدیگر منحنی پوش حداقل و با وصل کردن نقاط حداکثر منحنی پوش حداکثر بدست می‌آید.

مقادیر حداقل و حداکثر نیرو در خرپا به علت بار متحرک

در یک خرپا به علت حرکت بار واحد نیروی داخلی اعضا عوض می‌شود. در موقعیت‌هایی که بار مناسب قرار می‌گیرد نیروی عضو حداقل و حداکثر گردد.



بار مرده گسترده یکنواخت	1.5 t/m
بار زنده گسترده یکنواخت	2 t/m
نیروی متمرکز زنده	10 t
اثر ضربه	22.4%

اثر ضربه: در نتیجه اعمال ناگهانی بار می‌باشد. در اثر اعمال ناگهانی بار، مقدار نیرو از حالت استاتیکی بزرگتر می‌شود. این به واسطه انرژی مربوط به هنگام اعمال بار است.
اثر ضربه فقط به بار زنده اعمال می‌گردد و برای مرده نخواهیم داشت.

$D_L L = 1.5(6.37 - 2.83) = 5.31$

$LL = 2 \times 6.37 + 10 \times 0.708 = 19.82$

$I = 0.244 \times 19.82 = +4.84 \quad \Rightarrow \quad F_{Cd_{Max}} = 29.97t$

$+29.97t$ کشش

F

$DL = 5.31$

$LL = 2 \times (-2.83) = -5.65$

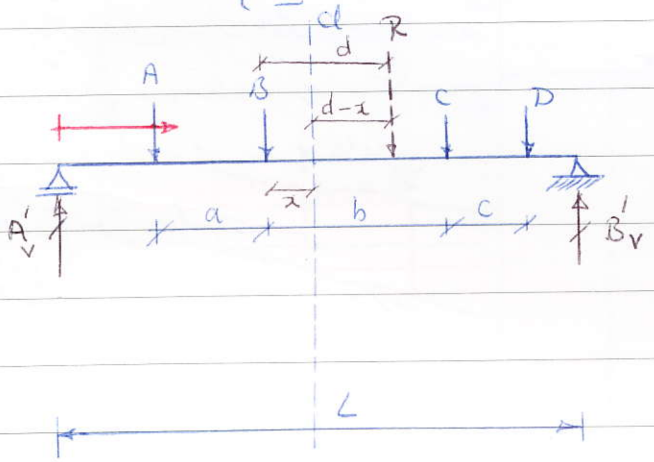
$+10(-0.472) = -4.72 \quad \Rightarrow \quad F_{Cd_{Min}} = -7.6t$

$I = 0.244 \times (-5.66 - 4.72) = -2.53$

$-7.6t$

لنگر خمشی حداکثر مطلق در یک تیر ساده تحت سری بارهای متمرکز متحرک (فاصله بارها از یکدیگر ثابت است)

این موضوع ارتباطی با خط تأثیر ندارد و موضوعی مستقل است ولی در حل مسئله زمینهٔ حق در حداکثر تابع می‌باشد



چون مجموعه بار متمرکز داریم لنگر خمشی حداکثر بدون شک زیر یکی از بارها رخ می‌دهد.
فرض می‌کنیم این حداکثر زیر B باشد
برآیند بارها را R در نظر می‌گیریم
x را طوری تعیین می‌کنیم تا لنگر زیر بار B حداکثر گردد.

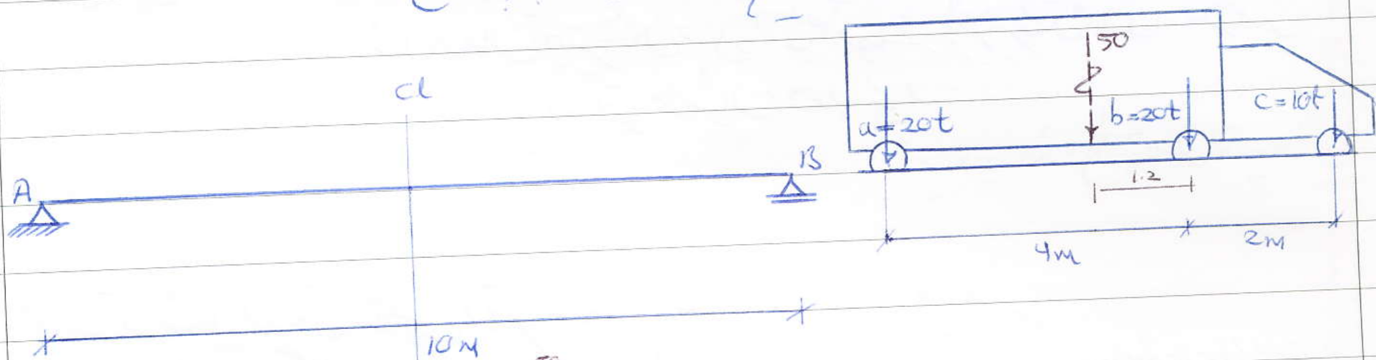
$$A'_V = \frac{1}{L}(R)\left(\frac{l}{2} - (d-x)\right) = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$

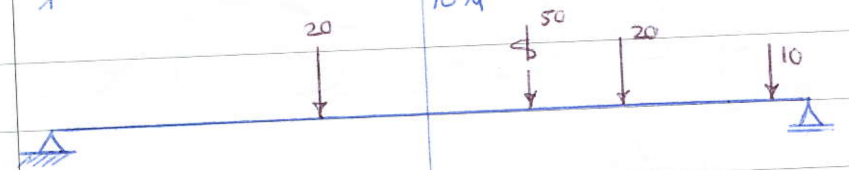
$$M_B = A_V\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa = \left(\frac{R}{2} + \frac{Rx}{l} - \frac{Rd}{L}\right)\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa$$

$$M_B = \frac{RL}{4} - \frac{Rd}{2} - \frac{Rx^2}{L} + \frac{Rxd}{L} - Aa \rightarrow \frac{dM_B}{dx} = 0 \rightarrow -\frac{2Rx}{L} + \frac{Rd}{L} = 0$$

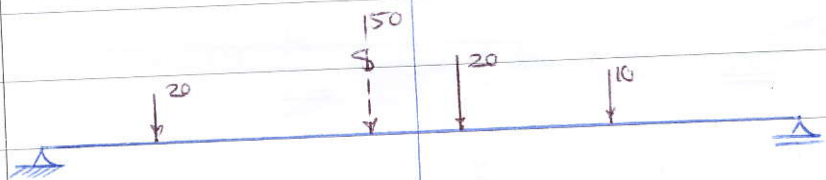
$$\rightarrow x = d/2$$

لنگر در زیر یک بار متمرکز وقتی حداکثر است که وسط دهانه در وسط فاصله این بار متمرکز و برآیند قرار گیرد. این لنگر ممکن است بزرگترین لنگر نباشد و نیاز به آزمایش بارهای متمرکز دیگر داشته باشیم. ولی تجربه نشان می‌دهد لنگر حداکثر مطلق همیشه زیر بزرگترین و نزدیکترین بار به برآیند رخ می‌دهد.

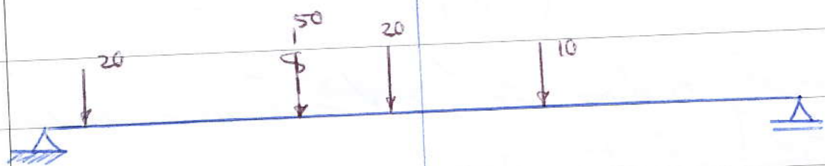




$M_a = 64.8$ ton.m

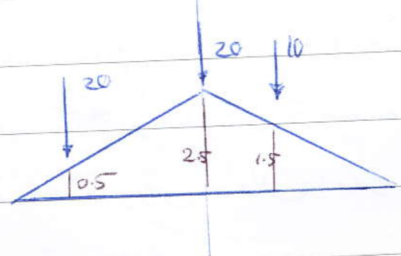


$M_b = 76.8$ حداکثر مطلق



$M_c = 57.6$

حل از روش خط تأثیر



M_{cl}

$$M_{cl} = 20\times0.5 + 20\times2.5 + 10\times1.5$$

$$= 10 + 50 + 15 = 75$$

حمید کاظم

فصل پنجم

تغییر شکل سازه‌ها

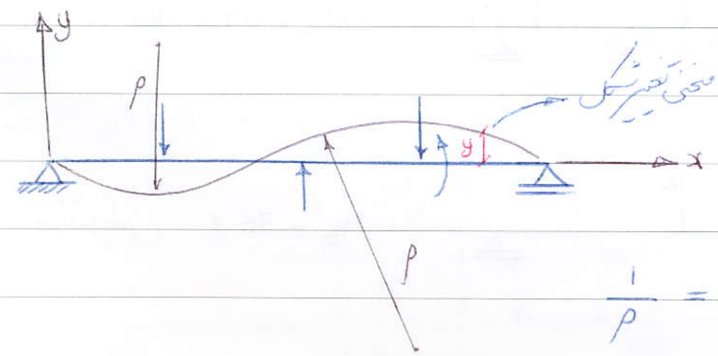
در این فصل تغییر شکل سازه‌های معین مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها دو روش مورد توجه قرار خواهد گرفت:

۱) روش هندسی: در این روش معادله دیفرانسیل تغییر شکل اعضای خمشی مورد توجه قرار گرفته و از روش‌های ترسیمی برای حل آن استفاده می‌شود.

۲) روش انرژی: ملاحظه می‌گردد روش‌های انرژی دید بس وسیعی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها بدست می‌دهند. در کلیه روش‌های انرژی می‌توان تغییر شکل سازه‌های معین را در اثر نیروهای محوری، لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروهای برشی محاسبه نمود و هیچ محدودیتی برای آن وجود ندارد.

محاسبه تغییر شکل‌های ناشی از خمش در تیرها به کمک رابطه دیفرانسیل خمش الاستیک:

از درس مقاومت مصالح می‌دانیم که ما بین شعاع انحنای یک تیر و لنگر خمشی آن رابطه زیر برقرار است:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

از هندسه تحلیلی:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

در کلیه سازه‌ها با تغییر شکل‌های کوچک سروکار داریم. تغییر شکل کوچک تغییر شکلی است که در هندسه اولیه تغییر چندانی ایجاد نمی‌کند. به عنوان مثال تغییر شکل حداکثر یک تیر محدود به $\frac{L}{300}$ است یعنی اگر دهانه تیری 6m باشد تغییر شکل حداکثر آن محدود 2cm خواهد بود. این مقدار نمی‌تواند هندسه اولیه تیر را بهم بزند. در تغییر شکل‌های کوچک با تقریب خوبی می‌توان مجذور شیب را برابر صفر گرفت چون y' بسیار کوچک است و وقتی به توان دو برسد مجذور شیب کوچک‌تر خواهد شد. بنابراین رابطه دیفرانسیل بصورت زیر در می‌آید:

$$y'' = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

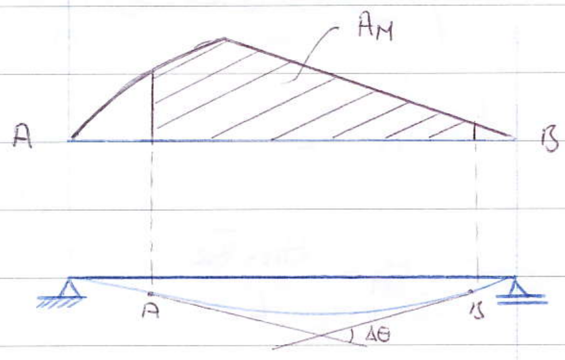
از تلفیق روابط ۱ و ۲ می‌توان نوشت:

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

معادله فوق به معادله دیفرانسیل تغییر شکل عضو خمشی معروف است.

اگر معادله M بدست آید با دوبار انتگرال گیری از آن می‌توان معادله y را بدست آورد. در همه موارد این انتگرال گیری به سادگی انجام نمی‌شود. در مهندسی نیازی به داشتن معادله هم نیست. از دیدگاه یک مهندس می‌بایست تغییر شکل تیر در یک یا چند نقطه مشخص مهم‌تر می‌باشد. به همین علت روش‌های عددی برای حل این معادله دیفرانسیل ابداع شده است.

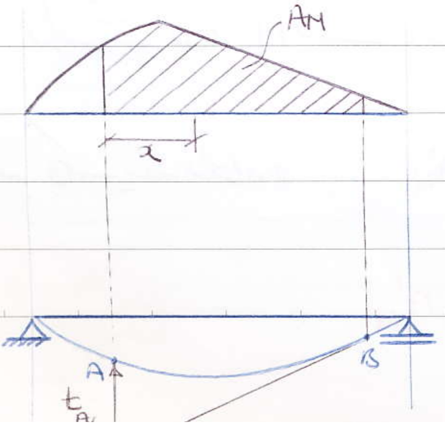
قضیه اول لنگر سطح: زاویه بین مماس‌های مرسوم بر دو نقطه منحنی تغییر شکل برابر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ می‌باشد.



نمودار $\frac{M}{EI}$

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_B = A_M$$

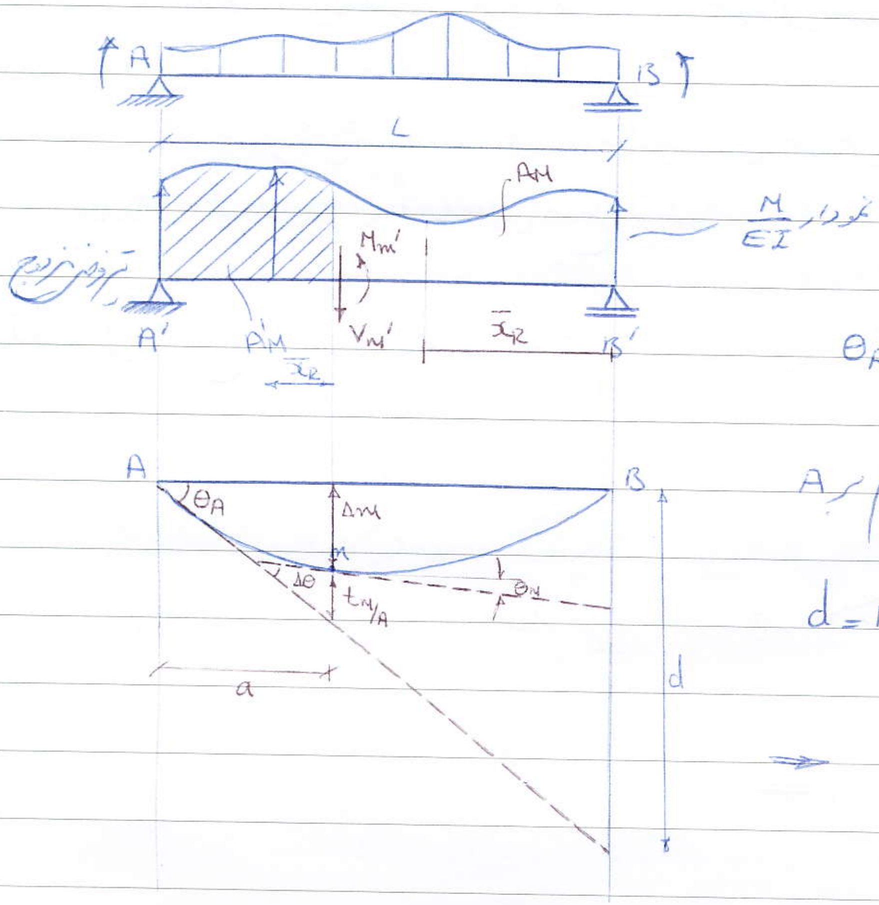
قضیه دوم لنگر سطح: انحراف نقطه A واقع در روی منحنی الاستیک از مماس مرسوم بر نقطه B واقع در روی منحنی الاستیک مساوی با لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین این دو نقطه نسبت به نقطه A.



$$t_{A/M} = A_M \cdot x$$

روش بار الاستیک:

روشی تشبیهی است. بدین معنی که تیری با بارگذاری الاستیک مشخص می‌شود. بار الاستیک این تیر نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. ثابت می‌شود که θ و Δ در تیر اصلی مثل هم به نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر الاستیک یا تیر فرضی است.



$$\theta_A = \frac{d}{l}$$

$d =$ انحراف نقطه B از مماس رسم شده بر A

$$d = A_M \cdot \bar{x}_R$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

در تیر مزدوج:

$$\Sigma M_{B'} = 0 \Rightarrow R_{A'} = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

مشاهده می‌شود که θ_A در تیر اصلی مانند $R_{A'}$ در تیر مزدوج است. تیر مزدوج تیری است هم طول با تیر اصلی که بار وارد بر آن نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. به آن بار الاستیک گویند. در صورتیکه نمودار M مثبت باشد بار الاستیک مثبت بوده و رو به بالا است.

محاسبه θ یک نقطه دلخواه:

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_M \Rightarrow \theta_M = \theta_A - \Delta\theta \qquad \Delta\theta = A'_M$$

$$\Rightarrow \theta_M = \theta_A - A'_M$$

$$\Rightarrow \theta_M = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L} - A'_M$$

نیروی برشی در تیر مزدوج:

$$V_{M'} = R_{A'} - A'_M$$

ث: دیده می‌شود که نیروی برشی در تیر مزدوج همان شیب منحنی تغییر شکل در تیر اصلی است. به این نیروی برشی، نیروی برشی الاستیک گویند. از همان قرارداد نیروی برشی برای آن استفاده می‌گردد. اگر نیروی برشی الاستیک مثبت باشد، شیب مثبت است (شیب رو به بالا). اگر نیروی برشی الاستیک منفی باشد، شیب منفی است (رو به پایین).

محاسبه Δ نقطه m:

$$\Delta_M = a\theta_A - t_{M/A}$$

$$\Delta_M = aR_{A'} - A'_M \cdot \bar{x}_R$$

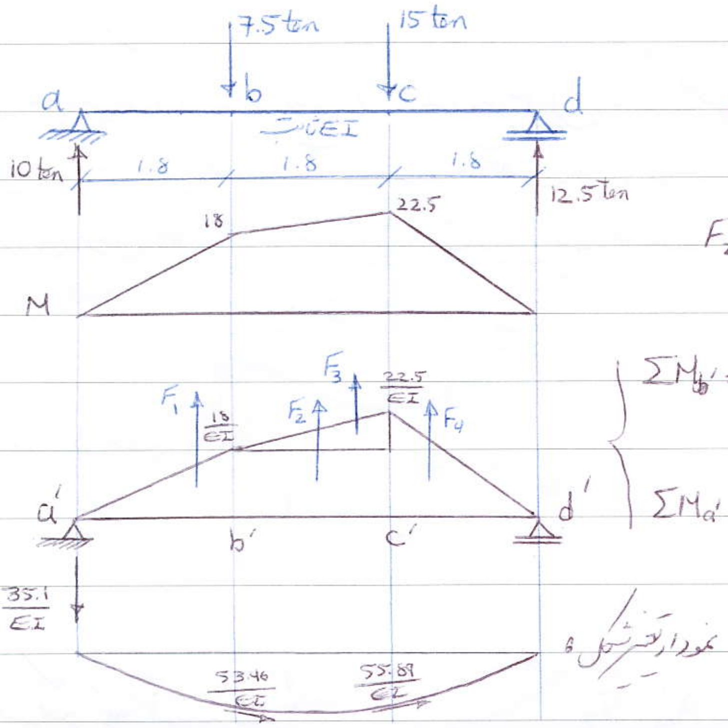
محاسبه لنگر m در تیر مزدوج:

$$\Sigma M_{M'} = 0 \Rightarrow M_{M'} = R_{A'} \cdot a - A'_M \cdot \bar{x}_R$$

ش: دیده می‌شود که محاسبه تغییر مکان نقطه در تیر اصلی مساوی لنگر خمشی در تیر مزدوج است. به این لنگر، لنگر خمشی الاستیک گویند. لنگر خمشی الاستیک وقتی مثبت است که در تیر پایین الیاف کشش ببیند (همان قرارداد علامت سابق). اگر لنگر خمشی الاستیک مثبت باشد تغییر مکان رو به بالا است. اگر لنگر خمشی الاستیک منفی باشد، تغییر مکان منفی بوده رو به پایین است.

$$\frac{dV}{dx} = q \qquad \frac{dM}{dx} = V \longrightarrow y'' = \frac{M}{EI}$$

مثال: در تیر نشان داده شده تغییر مکان قائم و دوران نقاط A ، B ، C ، D را محاسبه و مقدار تغییر مکان حداکثر را بدست آورید.



$$F_1 = \frac{1.8}{2} \times \frac{18}{EI} = \frac{16.2}{EI}$$

$$F_2 = \frac{32.4}{EI} \qquad F_3 = \frac{4.05}{EI} \qquad F_4 = \frac{20.25}{EI}$$

$$\Sigma M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{35.1}{EI}$$

$$\Sigma M_{a'} = 0 \Rightarrow R_{d'} = \frac{37.8}{EI}$$

$$\theta_a = V_{a'} = -\frac{35.1}{EI} \qquad V_{a'} = \frac{-35.1}{EI}$$

$$\theta_b = V_{b'} = F_1 - R_{a'} = -\frac{18.9}{EI}$$

$$\delta_b = M_{b'} = -1.8\left(\frac{35.1}{EI}\right) + \left(\frac{16.2}{EI}\right)(0.6) = -\frac{53.46}{EI} \downarrow$$

$$\theta_c = V_{c'} = R_{d'} - F_4 = +\frac{17.55}{EI}$$

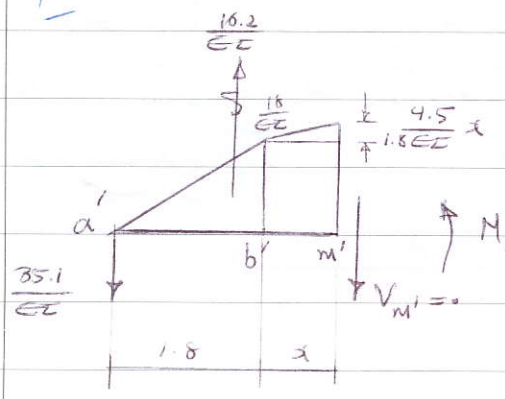
$$\delta_c = M_{c'} = -\frac{55.89}{EI} \downarrow$$

$$\theta_d = V_{d'} = +\frac{37.8}{EI}$$

$$\delta_d = M_{d'} = 0$$

می‌ماند مقدار و محل تغییر مکان Max :

با توجه به نتایج بدست آمده و تغییر علامت شیب بین نقاط B و C می‌توان نتیجه گرفت که تغییر مکان حداکثر بین نقاط B - C رخ می‌دهد و در آن $\theta = 0$ است. نتیجه می‌گیریم جایی قرار دارد که مقدار برش الاستیک برابر صفر است.



$M_{m'} = M_{Max}$

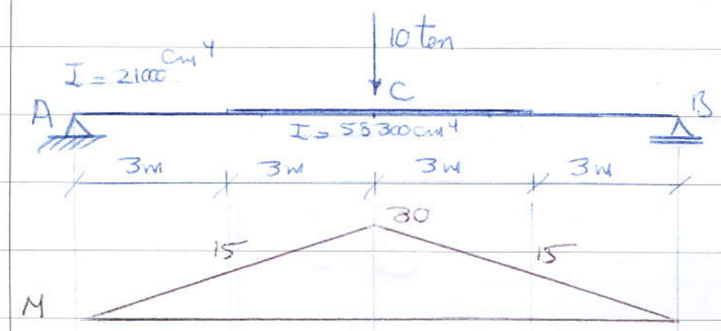
$V_{m'} = 0$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\frac{35.1}{EI} + \frac{16.2}{EI} + \frac{18x}{EI} + \frac{4.5}{1.8EI}\, x \,\frac{x}{2} = 0$$

$$\rightarrow x = 0.984\,m$$

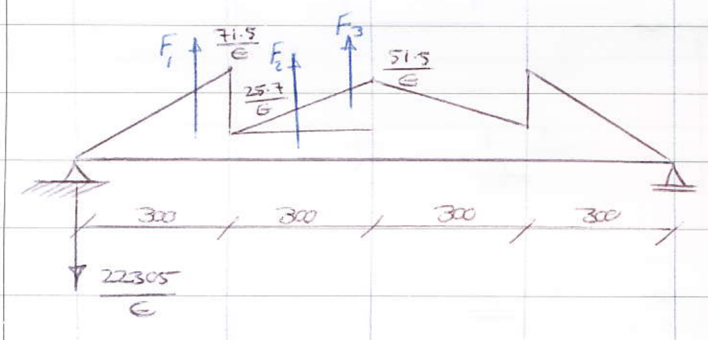
$$\Sigma M_{m'} = 0 \Rightarrow EI\, M_{m'} + 35.1(1.8 + 0.984) - 16.2(0.6 + 0.984) - 18 \times 0.98 \times \frac{0.984}{2} - \frac{4.5}{1.8} \times 0.984 \times \frac{0.984^2}{2 \times 3} = 0 \rightarrow \delta_{Max} = M_{m'} = \frac{-62.76}{EI} \downarrow$$

مثال: در شکل نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.



$E = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$

واحد طول = cm　　نیرو = kg



$$F_1 = \frac{71.5 \times 300}{2E} = \frac{10725}{E}$$

$$F_2 = \frac{7710}{E} \qquad F_3 = \frac{3870}{E}$$

$$R_A' = \frac{22305}{E}$$

$$\delta_C = M_C' = -R_A'(600) + 400F_1 + 150F_2 + 100F_3 = -\frac{7549500}{E} = -3.78\,cm \downarrow$$

تعمیم روش بار الاستیک برای تیرها با شرایط تکیه‌گاهی مختلف (روش تیر مزدوج):

تاکنون روش بار الاستیک فقط برای تیرهای ساده مورد توجه قرار گرفت. می‌توان ثابت نمود که این روش برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف قابل تعمیم است، مشروط بر اینکه در تیر مزدوج تغییراتی در شرایط تکیه‌گاهی بوجود آید. به عنوان مثال تیری مطابق شکل زیر در نظر گرفته شده و شرایط تکیه‌گاهی را در تیر مزدوج اقناع می‌گردد. توجه شود در این حالت شرایط مرزی هندسی باید تبدیل به شرایط مرزی استاتیکی گردد.

شرایط مرزی هندسی تیر واقعی:

$\theta_a = 0$ $\theta_b =$ ناپیوسته $\theta_c =$ وجود دارد

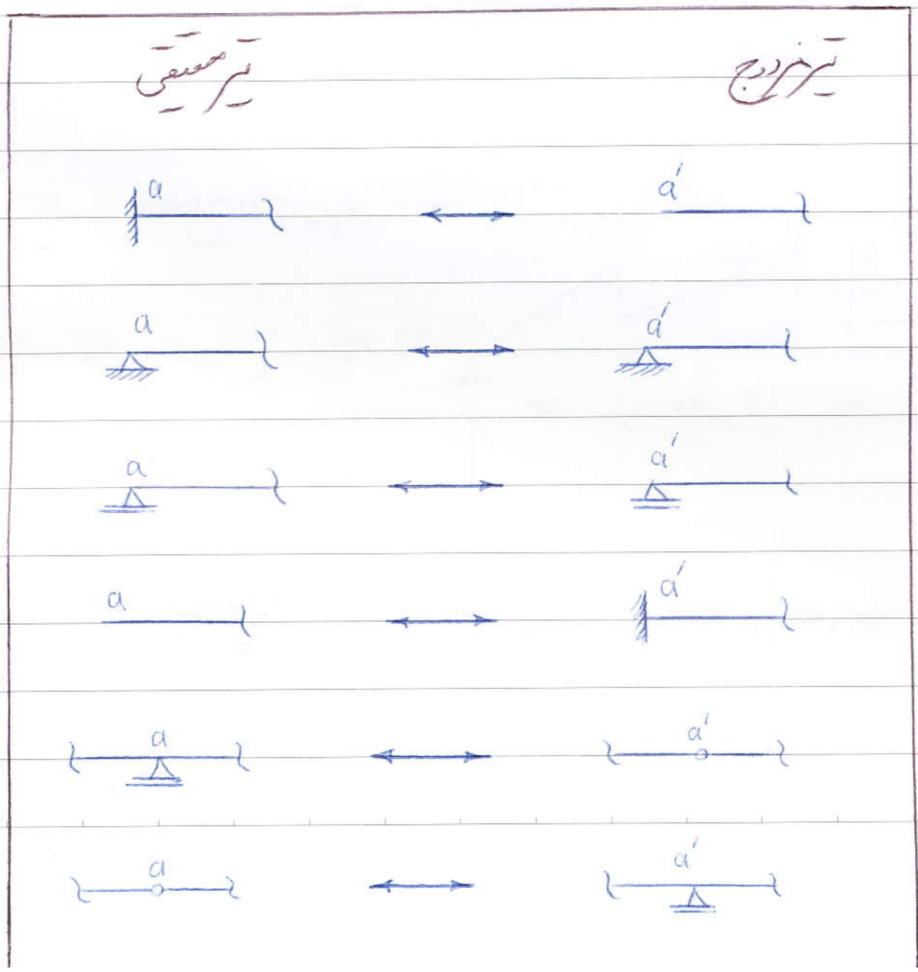
$\delta_a = 0$ $\delta_b =$ وجود دارد $\delta_c = 0$

شرایط مرزی استاتیکی در تیر مزدوج:

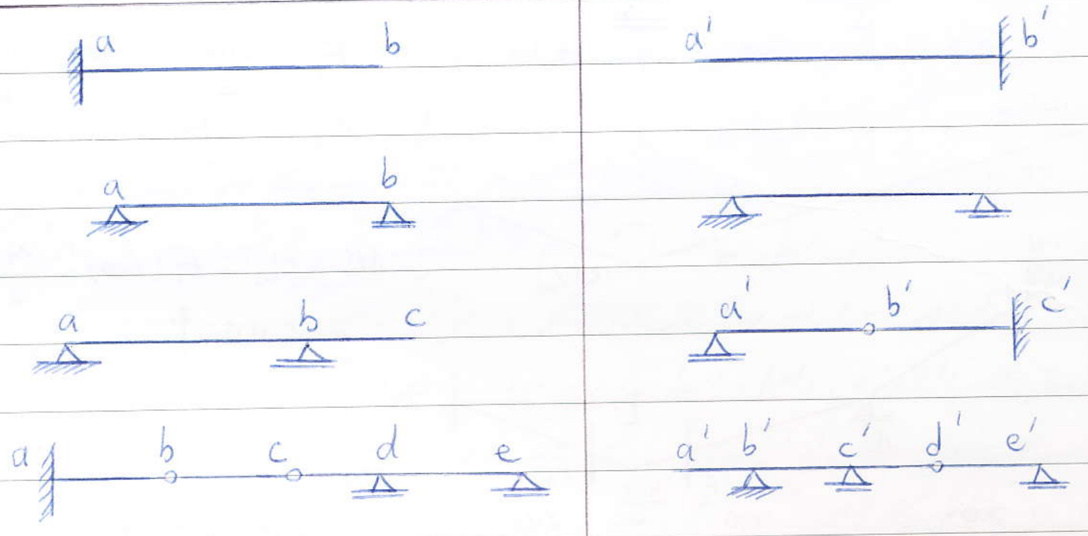
$V_{a'} = 0$ $V_{b'} =$ ناپیوسته $V_{c'} =$ وجود دارد

$M_{a'} = 0$ $M_{b'} =$ وجود دارد $M_{c'} = 0$

تیر مزدوج ←

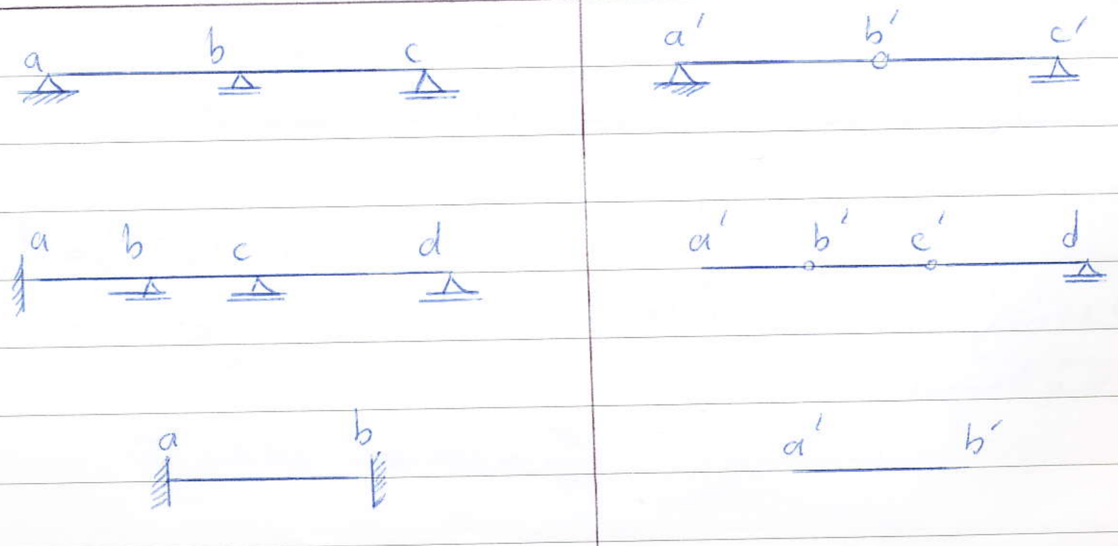


تیر مزدوج	تیر حقیقی



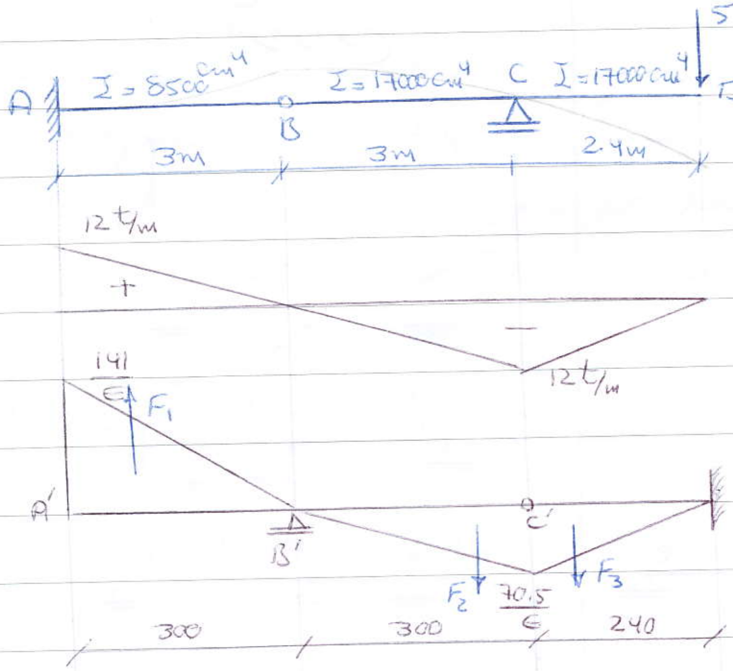
مثال های انتخاب شده تماماً تیرهای معین بودند که تیر مزدوج شکل معین بدست می آید. حال چند مثال از تیرهای نامعین ارائه می کنیم. ملاحظه خواهد شد که تیر مزدوج سازه های نامعین ناپایدارند. شرط پایداری این سازه های ناپایدار روشی برای تحلیل تیرهای نامعین است که این روش در درس تحلیل استفاده خواهیم کرد.

تیر مزدوج	تیر حقیقی



مثال: Δ_B , Δ_D , $\theta_{B_{left}}$ را بدست آورید

$E = 2\times10^6$



$F_1 = \frac{21150}{E}$ $\quad F_2 = \frac{10575}{E}$

$F_3 = \frac{8460}{E}$

$\Delta_B = M_B' = F_1(200) = \frac{423\times10^4}{2\times10^6}$

$= 2.11\ cm \uparrow$

$\theta_{B\ell} = V_{B\ell}' = F_1 = \frac{21150}{2\times10^6}$

$= 0.0105\ rad$

$\Delta_D = M_D'$

$\sum M_{C'} = 0$ (برای $A'B'C'$)

$F_1(200+300) - F_2(100) - R_B'(300) = 0 \longrightarrow R_B' = \frac{31725}{E}$

$\Delta_D = M_D' = F_1(200+300+240) - R_B'(300+240) - F_2(100+240)$

$- F_3(160) \longrightarrow \Delta_D = \frac{-642.96\times10^4}{2\times10^6} = -3.21\ cm \downarrow$

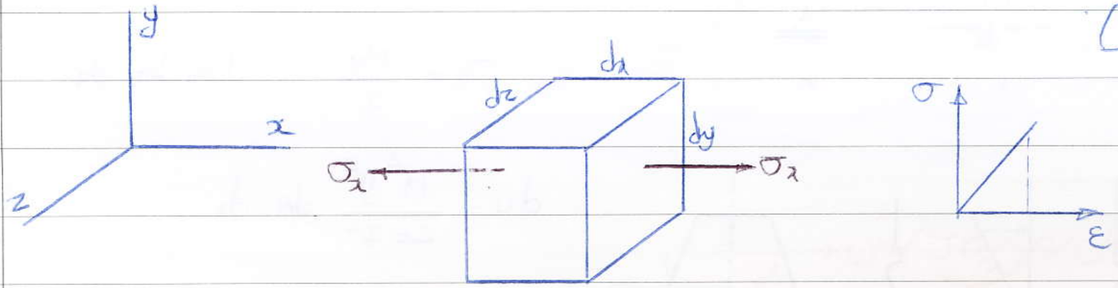
روش های انرژی:

در مکانیک، انرژی به صورت ظرفیت انجام کار تعریف می‌شود و کار نیز حاصلضرب نیرو در تصویر تغییر مکان در امتداد نیرو است. در اجسام تغییر شکل پذیر الاستیک، حاصلضرب تنش در سطوح مربوطه این نیرو را می‌دهد و تغییر شکل های مربوطه تشکیل تغییر شکل های نیروهای فوق را می‌دهد. حاصلضرب این دو کمیت کار داخلی انجام شده در داخل جسم الاستیک توسط نیروهای خارجی است. این کار داخلی به صورت انرژی داخلی در داخل جسم الاستیک ذخیره می‌شود که آن را انرژی کرنش داخلی گویند. در اغلب موارد در زبان ساده آن را انرژی داخلی گویند.

در این فصل ابتدا انرژی داخلی استخراج می‌شود، سپس با توجه به روابط انرژی روش های متعددی برای محاسبه تغییر شکل سازه ها ارائه می‌شود. خواهید دید که این روش ها مختص تغییر شکل ها نیستند و از آنها می‌توان تغییر شکل های جسم، پخش نیروهای کوتاه و غیره را نیز بدست آورد.

انرژی کرنشی داخلی برای تنش تک محوری:

یک جزء کوچک از مصالح الاستیک که تحت تاثیر تنش محوری قرار دارد در نظر گرفته و برای این حالت انرژی را حاصل می‌نماییم.



انرژی = نیرو × تغییر مکان

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x\, dz\, dy)(\varepsilon_x\, dx) \rightarrow dU = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x\, dx\, dy\, dz$$

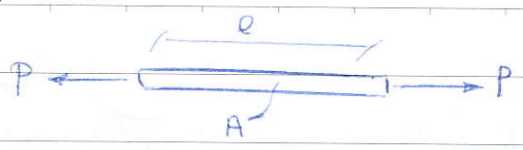
$$\rightarrow dU = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x\, dV \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$$

dU/dV: انرژی کرنشی ذخیره شده در واحد حجم مصالح و یا چگالی انرژی کرنشی را بدست می‌دهد در واحد حجم الاستیک:

قانون هوک $\rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

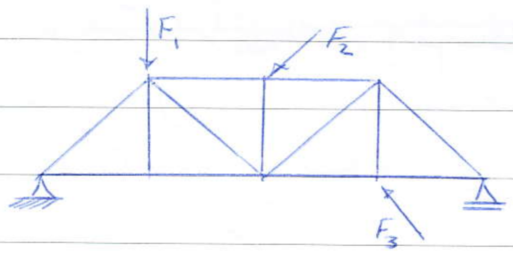
$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \rightarrow U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dV$$

۱) انرژی ذخیره شده برای اعضای محوری :



$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dV} &= \frac{\sigma_x^2}{2E} \\ \sigma_x &= P/A \\ dV &= A\,dx \end{aligned}\right\} \rightarrow dU = \frac{P^2}{2EA^2}A\,dx \rightarrow U=\int_0^l \frac{P^2}{2EA}dx$$

$$U=\frac{P^2L}{2EA}$$



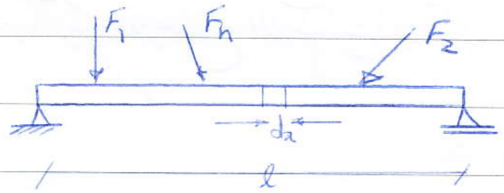
$$U=\sum \frac{P_i^2 L_i}{2EA_i}$$

P_i = نیروی داخلی عضو i

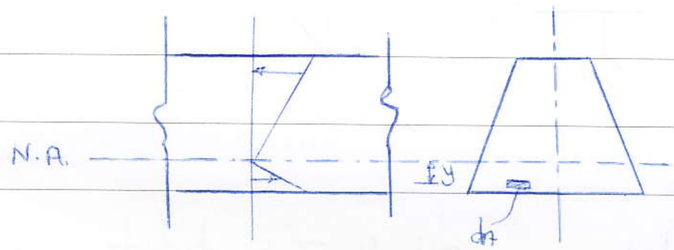
A_i = سطح مقطع

L_i : طول

۲) انرژی ذخیره شده برای اعضای خمشی (خمش خالص) :



$$\sigma_x=\frac{My}{I} \qquad dV=dA.dx$$



$$dU=\frac{M^2y^2}{2EI^2}dA.dx$$

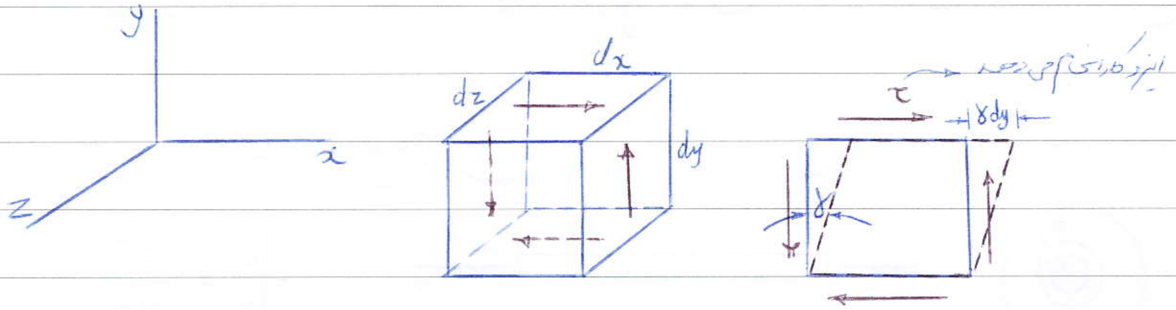
$$U=\int \frac{M^2y^2}{2EI^2}dA\,dx$$

$$\rightarrow U=\int \frac{M^2}{2EI^2}dx\int y^2dA \Rightarrow U=\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$$

M : لنگر خمشی داخلی

انرژی داخلی برای تنش های برشی :

مجدداً عضو کوچکی از یک جسم الاستیک تحت تاثیر تنش های برشی را در نظر گرفته برای آن انرژی را حساب می‌کنیم



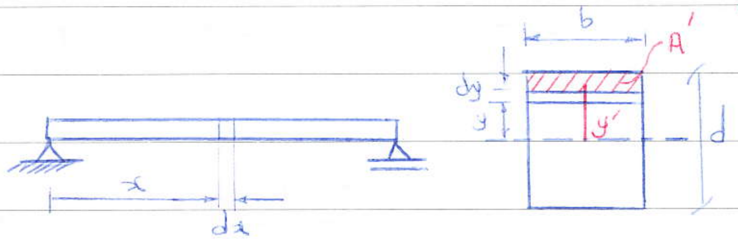
$$dU = \frac{1}{2}\tau\, dz\, dx \times \gamma\, dy = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

$\tau = G\gamma$ G : ضریب الاستیسیته برشی   برای اجسام الاستیک

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\frac{\tau}{G} \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

(۱) انرژی کرنشی داخلی برای نیروهای برشی :



$$\frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2}{2G} \qquad \tau = \frac{V_x Q}{Ib} , \qquad dV = b\, dy\, dx$$

V_x : نیروی برشی داخلی

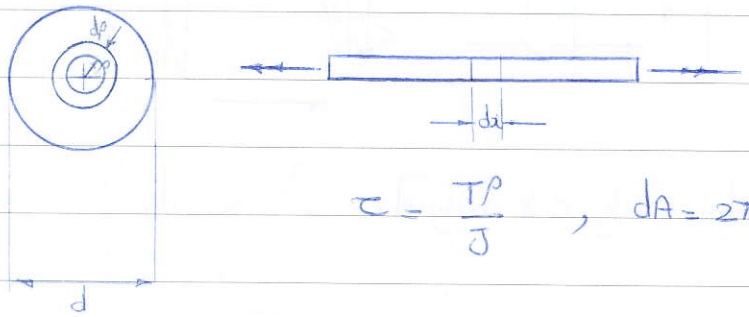
$$Q = A'y' = b(d/2 - y)\left[y + \left(\frac{d/2 - y}{2}\right)\right] = \frac{b}{8}(d^2 - 4y^2)$$

$$\rightarrow dU = \frac{V_x^2 (d^2 - 4y^2)^2}{128 I^2 G} dV = \frac{V_x^2 (d^2 - 4y^2)^2}{128 I^2 G} b\, dx\, dy$$

$$U = 1.2\int_0^L \frac{V_x^2\,dx}{2GA} \longrightarrow U = k\int_0^L \frac{V_x^2\,dx}{2GA}$$

مقطع مستطیل : $K = 1.2$ $\bigcirc$: $\frac{10}{6} = 1.667$ I : $K = 1$

۱۲) انرژی کرنشی داخلی برای لنگر پیچشی :



$$\frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad , \quad dA = 2\pi\rho\,d\rho \longrightarrow dV = 2\pi\rho\,d\rho\,dx$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2}\frac{T^2\rho^2}{GJ^2}\,2\pi\rho\,d\rho\,dx \longrightarrow U = \int \frac{1}{2}\frac{T^2\rho^2}{GJ^2}\,2\pi\rho\,d\rho\,dx$$

$$\longrightarrow U = \int \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ^2}\,dx\int_0^c 2\pi\rho^3\,d\rho = \int \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ^2}\,dx\,2\pi\frac{c^4}{4} \qquad J = \frac{\pi c^4}{2}$$

$$U = \int \frac{T^2}{2GJ}\,dx$$

مقطع مستطیل : $J = cb^3h$ h ضلع بزرگ b ضلع کوچک $c = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right]$

انرژی کرنشی برای تنش های چند محوره :

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}$$

با استفاده از قانون عمومی هوک :

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)$$

$$+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

تنش صفحه‌ای :

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

وقتی عضوی تحت ترکیب نیروهای محوری، خمشی، برشی و پیچشی باشد از آنجا که انرژی تابع اسکالر است، می‌توان انرژی را برای نیروهای داخلی مختلف جدا به دست آورد و آن‌ها را با هم جمع کرد.

$$U = \frac{P^2L}{2EA} + \int \frac{M^2}{2EI}dx + k\int \frac{V_x^2}{2GA}dx + \int \frac{T^2}{2GJ}dx$$

محاسبه تغییر مکان‌ها با استفاده از روش‌های انرژی :

با استفاده از روابط حاصل شده برای انرژی ذخیره شده در اعضای الاستیک روش‌های مختلفی ارائه می‌گردد.

۱) روش کار حقیقی : از لحاظ مفهومی این روش بسیار قابل فهم و واضح و مقدمه خوب برای روش‌های دیگر است اما از لحاظ کاربردی بسیار ضعیف و محدود است. مبنای این روش بر اساس اصل بقای انرژی است.

انرژی داخلی = کار خارجی

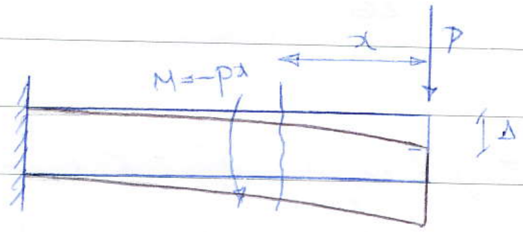
$U = \int_0^l \frac{P^2 dx}{2EA}$ عضو محوری	$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}$ عضو خمشی
$U = k\int^l \frac{V_x^2 dx}{\ldots}$ عضو برشی	$U = \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GJ}$ عضو پیچشی

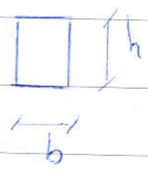
مثال ۱: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر یکسر گیردار مقطع ثابت چیست؟

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 L}{EA}$$

$$\rightarrow W_e = U \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA}$$





مثال ۲: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر مقابل تحت بار P را بدست آورید.

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta \qquad U = U_b + U_s$$

انرژی خمش + انرژی برشی

$$U_b = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U_s = 1.2 \int_0^l \frac{V_x^2}{2GA} dx = 1.2 \int_0^l \frac{P^2}{2GA} dx = \frac{1.2 P^2 l}{2GA}$$

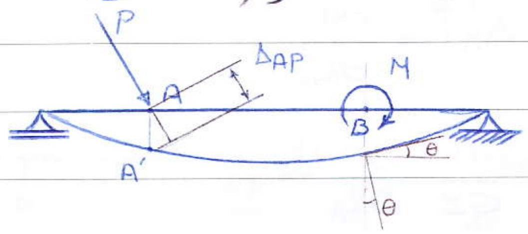
$$\frac{1}{2} P \Delta = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{1.2 P^2 L}{2GA} \rightarrow \Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{خمش}} + \underbrace{\frac{1.2 PL}{GA}}_{\text{برش}}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3E}{10G} \frac{h^2}{L^2}\right) = \Delta_b \left(1 + 0.75 \frac{h^2}{L^2}\right)$$

$h/L = 1/10$ تا $1/30$ — L ها در کنار — h ها [illegible]

کاستیلیانو (Castigliano)

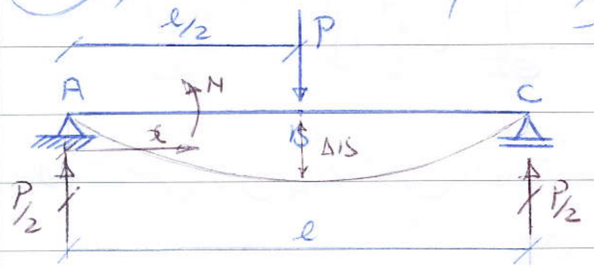
ثابت می‌شود مشتق جزئی تابع انرژی در یک جسم الاستیک در صورتی که دما ثابت بوده و تکیه‌گاه‌های آن فاقد نشست است، مساوی است با تغییر مکان الاستیک نقطه اثر نیرو در امتداد نیرو.



$$\Delta_{AP} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M}$$

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه B فقط به علت انرژی خمشی (EI ثابت)



$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

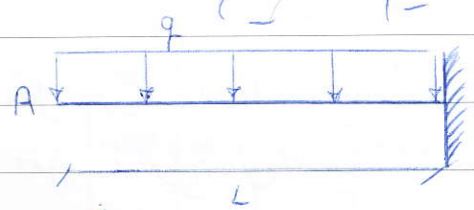
$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\Rightarrow \Delta_B = 2\int_0^{l/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \qquad M = \frac{P}{2}x \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\Delta_B = 2\int_0^{l/2} \frac{Px}{2EI} \times \frac{x}{2} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$\rightarrow \Delta_B = \frac{PL^3}{48EI}$$

در روش کار مجازی همواره باید یک نیرو در محل حساب کردن انرژی می‌داشتیم ولی در این روش ضرورتی ندارد.



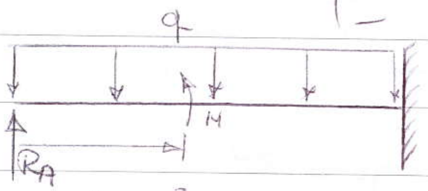
(EI ثابت)

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست ΔA در امتداد قائم و θ_A (فقط تغییر شکل ناشی از خمش)

در نقطه مورد نظر باید نیرویی در انرژی موجود داشته باشد تا بتوان از تابع انرژی نسبت به آن مشتق جزئی گرفت، بنابراین نیروی فرضی R_A

در امتداد قائم (مورد نظر) به انتهای تیر اثر می‌دهیم. قضیه کاستیلیانو را اعمال نموده پس از مشتق‌گیری مقدار

فرض اضافی نداریم. حال اگر در نقطه مورد نظر نیروی عددی موجود باشد آن عدد را به طور موقت به پارامتر تبدیل می‌کنیم. پس از مشتق گیری مجدداً پارامتر را برابر عدد قرار می‌دهیم.



$$\Delta_A \uparrow = \frac{\partial U}{\partial R_A}$$

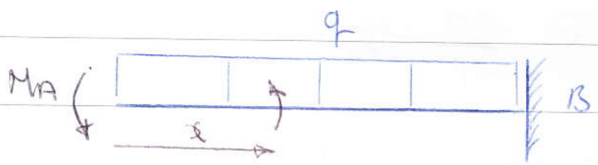
$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \qquad \Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx$$

$$\rightarrow M = R_A x - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Rightarrow \Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\cancel{R_A x} - \frac{qx^2}{2}\right) x\, dx = \frac{-q}{EI} \left(\frac{x^4}{8}\right)\Big]_0^l = -\frac{ql^4}{8EI}$$

علامت منفی برای Δ_A حاکی از آن است که تغییر مکان در خلاف جهت نیروی پارامتری R_A است.

تعیین θ_A:

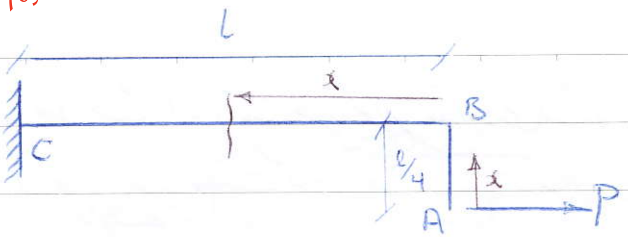


$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} dx \qquad M = -M_A - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

$$\theta = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(M_A - \frac{qx^2}{2}\right)(-1)\, dx = \frac{q}{EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{q}{EI} \frac{l^3}{6} = \frac{ql^3}{6EI}$$

مثال: در قاب نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را محاسبه نمایید. (تغییر شکل‌های ناشی از خمش) هدف از این مثال این است که نشان دهیم لازم است انتگرال گیری تابع انرژی در تمامی اعضا باید حساب شود.



$$U=\int_A^B \frac{M^2}{2EI}dx+\int_B^C \frac{M^2}{2EI}dx$$

$$\text{افقی } \overrightarrow{\Delta_A}=\frac{\partial U}{\partial P}=\int_A^B \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx+\int_B^C \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx$$

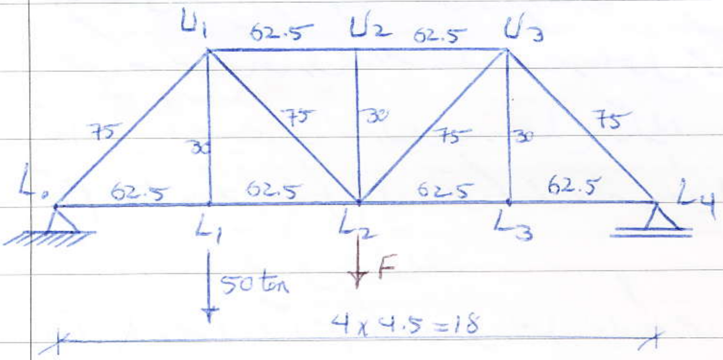
$M=Px \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P}=x$ ناحیه AB

$M=\frac{PL}{4} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P}=L/4$ ناحیه BC

$$\Delta A=\int_0^{L/4}\frac{Px}{EI}x\,dx+\int_0^L \frac{PL}{4EI}\frac{L}{4}dx=\frac{13PL^3}{192EI}$$

مثال: مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه L_2 در خرپای نشان داده شده در شکل. اعداد نوشته شده روی اعضا سطح مقطع اعضا برحسب cm^2 می‌باشد.

با توجه به اینکه در L_2 نیروی بار خارجی وجود ندارد لازم است نیروی مجازی F در آن قرار داده شود.



$$U=\sum \frac{P^2L}{2EA}$$

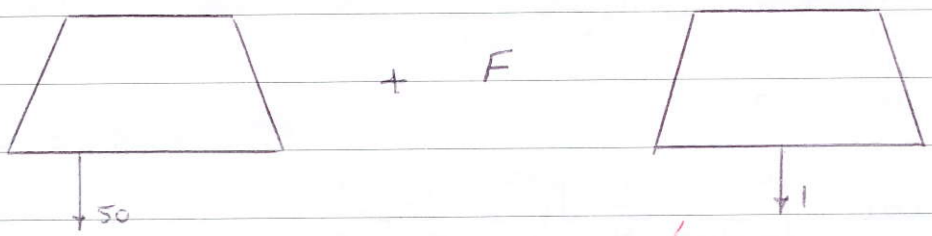
$$\Delta L_2=\sum \frac{PL}{EA}\frac{\partial P}{\partial F}=\frac{1}{E}\sum \frac{L}{A}P\frac{\partial P}{\partial F}$$

نیرو = kg   طول = cm

عضو	L	A	L/A	نیروی داخلی اعضا kg		$\partial P/\partial F$	$P\frac{L}{A}\frac{\partial P}{\partial F}$
واحد	cm	cm^2	1/cm	بار خارجی	F	kg/kg	kg/cm
L_0L_1	450	62.5	7.2	28125	0.375F	0.375	75937.5
L_1L_2	450	62.5	7.2	28125	0.375F	0.375	75937.5
L_4U_3	750	75	10	-15625	-0.625F	-0.625	97656.25

برای حل مسئله لازم است خرپا برای بارگذاری نشان داده شده تحلیل شود. چون نیروی بار افقی وجود دارد تحلیل خرپا وقت‌گیر خواهد بود. توصیه می‌شود در این حالت خرپا یک بار تنها برای بارهای خارجی عمودی و یک بار برای بار افقی مساوی واحد تحلیل شده و نتایج دو تحلیل با هم ترکیب شوند. این کار ساده‌تر خواهد بود.

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{795625}{2\times10^{6}} = 0.4\,cm\downarrow$$



روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

کار مجازی در مکانیک سازه‌ها در دو حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

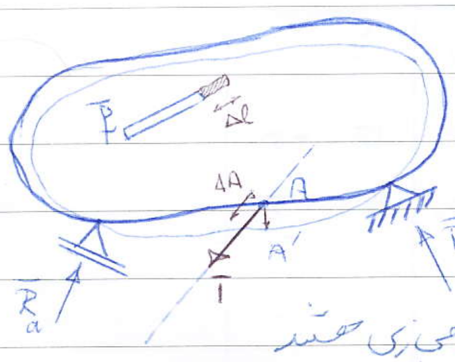
۱) در صورتیکه نیروها واقعی و تغییر مکان مجازی باشد. این شیوه در درس استاتیک برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی به کار می‌رود.

۲) حالتی که تغییر شکل‌ها حقیقی و نیرو مجازی است. این شیوه در محاسبه تغییر شکل‌ها استفاده می‌شود یعنی یک نیروی مجازی واحد به سازه اعمال می‌گردد.

گام اول: یک نیروی مجازی بر سازه اعمال می‌گردد.

گام دوم: تغییر شکل‌های واقعی که می‌تواند ناشی از بارهای خارجی یا اثر حرارت و یا نشست تکیه‌گاهی باشد بر سازه اعمال می‌گردد.

گام سوم: محاسبه می‌نویسیم کار مجازی داخلی برابر کار مجازی خارجی. این رابطه تعادل تغییر مکان نقطه مورد نظر را در امتداد بار واحد مجازی بدست می‌دهد.



$\bar{1}$: بار واحد مجازی خارجی

$\bar{f}$: نیروی داخلی مجازی

$\bar{R}_a , \bar{R}_b$: واکنش‌های مجازی

* در روابط مورد استفاده بالا، تمام علائمی که روی آنها کمیت‌های مجازی هستند
که به خط تیره قرار دارد.

کار مجازی خارجی = کار مجازی داخلی

$$\underbrace{W_R + \bar{T} \times \Delta_A}_{\text{نیروی مجازی}} = \overbrace{\sum(\bar{f} \,.\, \Delta L)}^{\text{تغییر شکل حقیقی}}$$

W_R : کار مجازی واکنش های تکیه گاهی به علت نشست تکیه گاهی

۱) روابط کار مجازی در خرپاها :

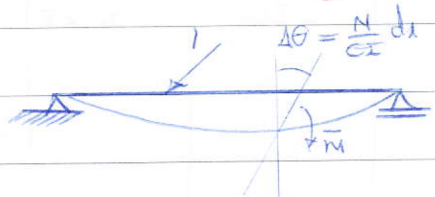
الف) به علت بارهای خارجی :

$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum(\bar{f} \,.\, \frac{PL}{EA})$$

ب) به علت تغییرات دما :

$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum \bar{f} (\alpha \Delta T L))$$

۲) روابط کار مجازی در تیرها به علت انرژی خمشی :



$$W_R + \bar{T} \underset{\Delta\theta}{\Delta A} = \int \bar{m} \,.\, \frac{M}{EI} dx$$

$m . \theta \sim f . l \sim$ انرژی

کاربرد روش کار مجازی :

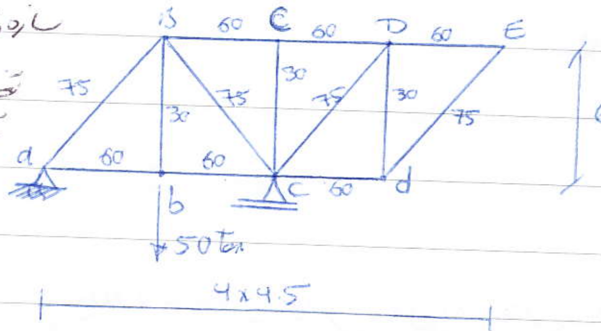
۱) خرپاها :

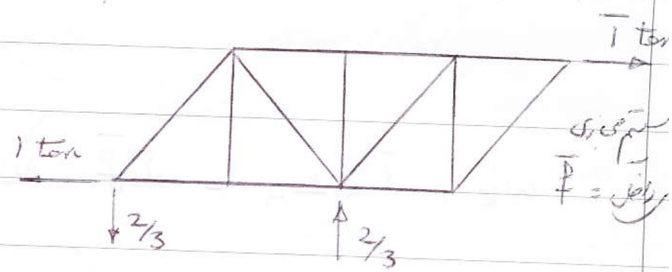
مثال : در خرپای شکل داده شده تغییر مکان نقطه E را بدست آورید. (اعداد داده شده سطح مقطع برحسب cm^2 می باشد)

$$E = 2\times10^6 \, kg/cm^2 = 2\times10^3 \, ton/cm^2$$

سازه واقعی (P)

تغییر شکل حقیقی





سیستم مجازی

$$\cancel{W_R} + \bar{1} \times \vec{\Delta E} = \sum \bar{f} \cdot \frac{PL}{EA}$$

$\bar{f}\,\frac{PL}{A}$ ton^2/cm	P ton	$\bar{f}$ ton	$\frac{L}{A}$ $1/cm$	A cm^2	L cm	عضو واحد
70.4	+18.75	+0.5	7.5	60	450	ab
70.4	+18.75	+0.5	7.5	60	450	bC
-260	-31.25	+0.83	10	75	750	aB
+260	-31.25	-0.83	10	75	750	Bc
$\Sigma =$ 140.8						

عناصری که یکی از نیروهای p و $\bar{f}$ برای آن ها صفر شده است در جدول نوشته نشده است.

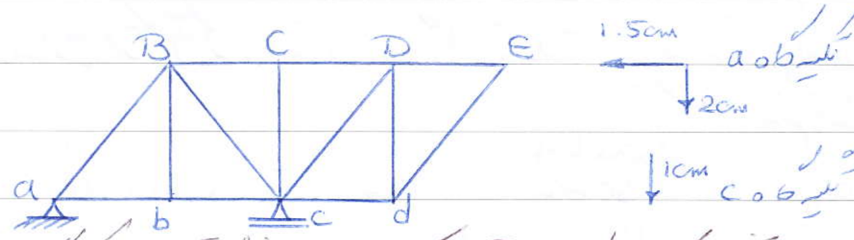
$$\bar{1}\Delta = \frac{1}{2000} \times 140.8 = 0.0704 \Rightarrow \Delta = 0.0704\,cm \rightarrow$$

با توجه به اینکه علامت Δ مثبت بدست آمده است فرض اولیه درست است که در جهت تغییر مکان هم جهت بار واحد می باشد.

$$W_R + \bar{1} \times \Delta = \sum \frac{\bar{f}_i \cdot P_i L_i}{E \cdot A_i}$$

برای خرپاها

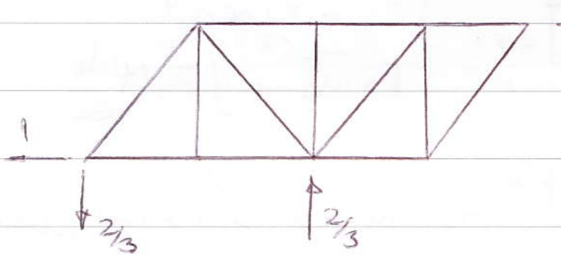
مثال: در خرپای مثال قبل تغییر مکان افقی گره E را به علت نشست های تکیه گاهی زیر محاسبه نمایید



برای حل در نقطه E بار واحد مجازی را در امتداد افقی اثر می دهیم تا سیستم مجازی بدست آید. اکنون تغییر مکان های واقعی را که همان نشست های تکیه گاهی باشند بر سیستم مجازی اعمال می نماییم. کارهای خارجی موجود ناشی از بار واحد مجازی 1 ton و کار واکنش های تکیه گاهی مجازی است. کار داخلی موجود نیست چون P برای اعضای داخل صفر است و با فرض اینکه در اثر نشست های تکیه گاهی هیچگونه تغییر طولی در اعضا ایجاد نمی شود.

$$\overline{W}_R + 1\times\vec{\Delta}_E = \sum \bar{F}\,\frac{PL}{EA}^{\,0} \rightarrow (2/3)(2)+(1)(1.5)-2/3\times 1+1\times\Delta E=0$$

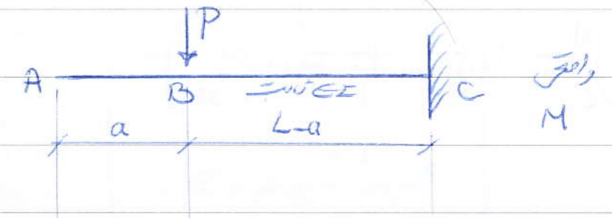
$$\rightarrow 1\times\Delta E=-2.17 \Rightarrow \Delta_E=2.17\,cm$$



1 ton در نقطه مورد نظر و امتداد مورد نظر اعمال گردد.

۲) تیرها:

در تیر نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه a را محاسبه نمایید. (فقط اثر خمش منظور گردد)



$$1\times\Delta_A^{\downarrow}=\int \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

$\bar{F}\,.\,\delta$

$\bar{m}\,.\,d\theta$

حاصل به لحاظ کارهای مجازی را می دهند

$$1 \times \Delta_A \downarrow = \int_A^B + \int_B^C$$

در محاسبات انتگرال گیری انتخاب مبدأ مختصات برای هر قسمت بطور مستقل امکان پذیر می باشد

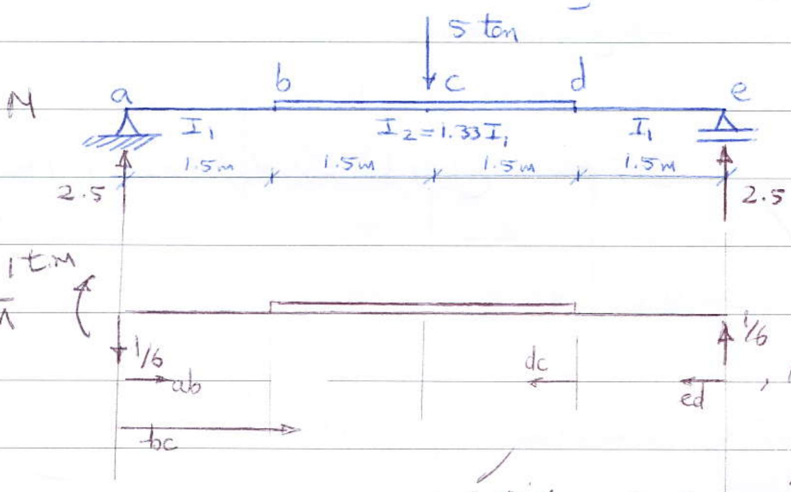
مسیر AB ، $0 < x < a$: $\bar{m} = x(-1)$ ، $M = 0$

مسیر BC ، $0 < x < L-a$: $\bar{m} = -1(a+x)$ ، $M = -px$

$$1 \times \Delta_A \downarrow = 0 + \frac{1}{EI} \int_0^{L-a} [-(a+x)][-px]\, dx$$

$$\rightarrow \Delta A \downarrow = \frac{P}{6EI} (L-a)^2 (2L+a)$$

مثال: در تیر نشان داده شده دوران نقطه A را محاسبه نمایید.



$E = 2 \times 10^3 \ t/cm^2$

$I_1 = 6200 \ cm^4$

$I_2 = 8260 \ cm^4$

$$1 \times \overset{\curvearrowright}{\alpha_a} = \int \bar{m} M \frac{dx}{EI}$$

در طول محدوده انتگرال گیری توابع M ، $\bar{m}$ ، I باید پیوسته و یکنواخت باشند.

بنابراین در این مسئله لازم است انتگرال گیری در چهار محدوده انجام گردد.

$$1 \times \overset{\curvearrowright}{\alpha_c} = \int_a^b + \int_b^c + \int_e^d + \int_d^c$$

$$= \frac{1}{EI_1} \left[\int_a^b \bar{m} M dx + \int_b^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33} + \int_e^d \bar{m} M dx + \int_d^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33} \right]$$

x	I	$\bar{m}$	M	ناحیه
$0<x<1.5$	I_1	$1-x/6$	$2.5x$	$b\bar{a}$
$1.5<x<3$	$1.33I_1$	$1-x/6$	$2.5x$	$c\bar{b}$
$0<x<1.5$	I_1	$x/6$	$2.5x$	$d\bar{e}$
$0<x<1.5$	$1.33I_1$	$1/6(1.5+x)$	$2.5(1.5+x)$	$c\bar{d}$

$$1\times\overset{\frown}{\alpha_a}=\frac{1}{EI_1}\Big[\int_0^{1.5}(1-x/6)(2.5x)\,dx+\int_{1.5}^{3}(1-x/6)(2.5x)\frac{dx}{1.33}$$

$$+\int_0^{1.5}(x/6)(2.5)x\,dx+\int_0^{1.5}(1/4+x/6)(3.75+2.5x)\frac{dx}{1.33}\Big]$$

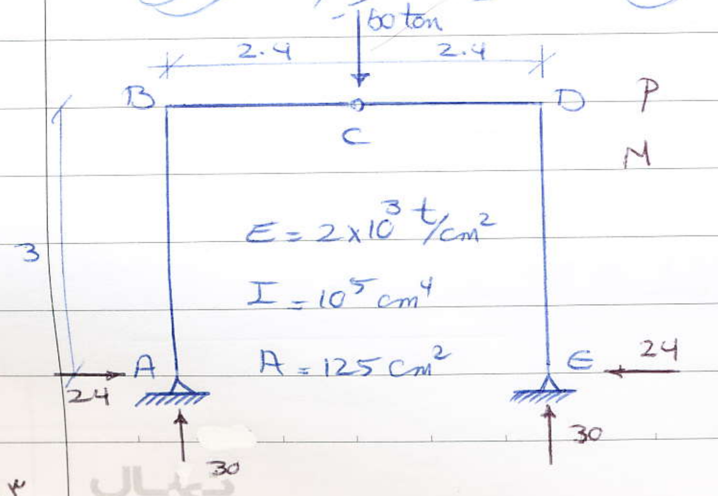
$$=\frac{1}{EI_1}\Big[\Big(\frac{5.5x^2}{2}-\frac{x^3}{7.2}\Big)\Big|_0^{1.5}+\frac{1}{1.33}\Big(\frac{2.5x^2}{2}-\frac{x^3}{7.2}\Big)\Big|_{1.5}^{3}$$

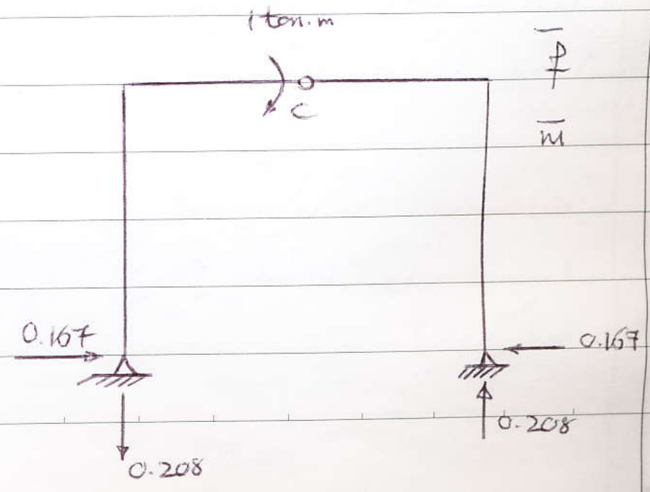
$$+\Big(\frac{x^3}{7.2}\Big)\Big|_0^{1.5}+\frac{1}{1.33}\Big(\frac{3.75}{4}x+\frac{5}{8}x^2+\frac{x^3}{7.2}\Big)\Big|_0^{1.5}\Big]=\frac{9.157}{EI_1}$$

$$\rightarrow \alpha_a=0.0074\ Rad \curvearrowright$$

۳) قاب‌ها:

(در قاب شکل داده شده دوران نسبی لولای c را بیابید (اثر تغییر شکل های برشی و محوری صرف نظر گردد)





$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx + \Sigma \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \int_A^B \bar{m} M \frac{dx}{EI} + \int_B^C + \int_E^D + \int_D^C + \Sigma \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

مقادیر $\bar{m}$ و M و $\bar{f}$ و P در نواحی مختلف تعریف می‌شوند.

$L=3 \quad , \quad 0<x<3 \quad \begin{cases} \bar{f} = 0.208 & \bar{m} = -0.167x \\ P = -30 & M = -24x \end{cases}$ از B تا A

$L=2.4m \quad , \quad 0<x<2.4 \quad \begin{cases} \bar{f} = -0.167 & \bar{m} = -0.5 - 2.08x \\ P = -24 & M = -72 + 30x \end{cases}$ از C تا B

$L=3 \quad 0<x<3 \quad \begin{cases} \bar{f} = -0.208 & \bar{m} = -0.167x \\ P = -30 & M = -24x \end{cases}$ از D تا E

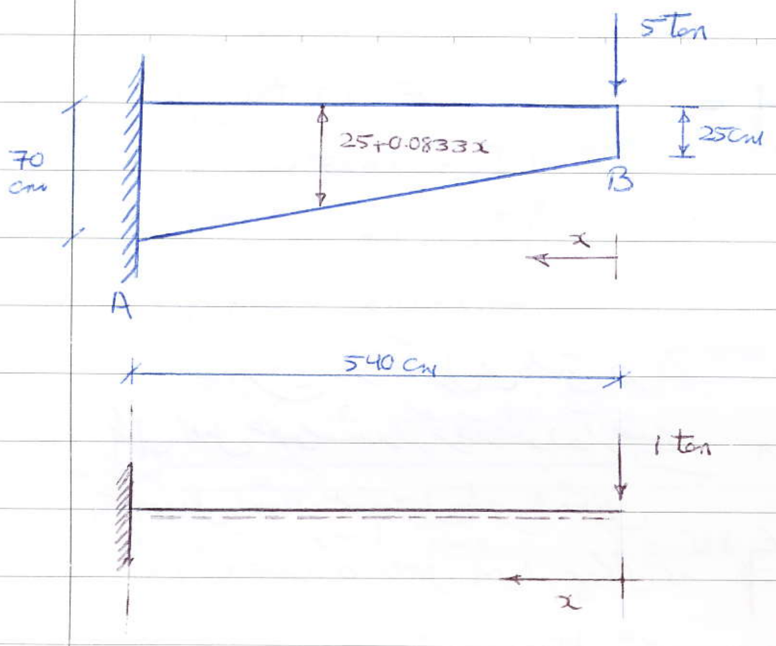
$L=2.4 \quad 0<x<2.4 \quad \begin{cases} \bar{f} = -0.167 & \bar{m} = -0.5 + 0.208x \\ P = -24 & M = -72 + 30x \end{cases}$ از C تا D

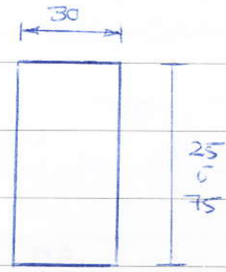
$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \frac{1}{EI} \left[2\int_0^3 (-0.176x)(-24x)\,dx + \int_0^{2.4} (-0.5 - 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \right.$$

$$\left. + \int_0^{2.4} (-0.5 + 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \right] + \frac{2}{EA}(0.167)(-24)(2.4)$$

$$= \frac{158.5}{EI} + \frac{19.2}{EA} = 0.00793 + 0.0000768 = 0.008 \text{ Rad.}$$

۴) تیرها با جمال انرژی متغیره





$E = 20\times 10^5 \ kg/cm^2$

$\boxed{\Delta B = ?}$

$$1\times \Delta_B \downarrow = \int_0^L \bar{m}\frac{M}{EI}\,dx$$

$\bar{m} = -x \ ton.cm, \ M = -5x \ ton.cm \ , \ I = 30(25+0.0833x)^3 \times \frac{1}{12}$

$E = 20\times 10^2 \ ton/cm^2$

$$\Delta_B = \frac{1}{E}\int \frac{(-5)(-5x)\,dx}{\frac{30(25+0.0833x)^3}{12}} = \frac{2\times 10^6}{833^3 E}\int_0^{540} \frac{x^2\,dx}{(300+x)^3}$$

$$y = a + x \longrightarrow x = y - a \Longrightarrow dx = dy$$

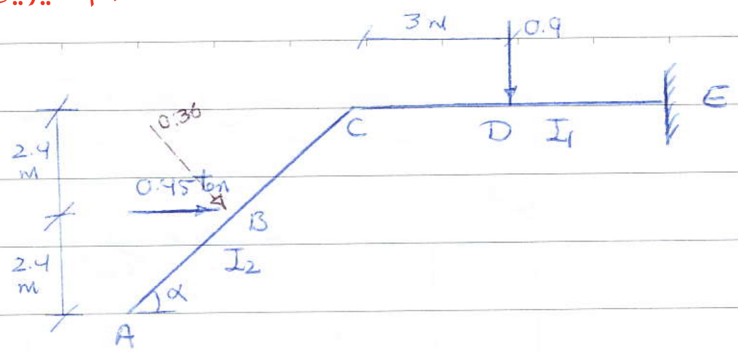
$$\longrightarrow \Delta_B = \frac{2\times 10^6}{833^3 E}\int_{300}^{840}\frac{(y-300)^2}{y^3}\,dy = A\left[\int_{300}^{840}\frac{dy}{y} - 600\int_{300}^{840}\frac{dy}{y^2} + 90000\int_{300}^{840}\frac{dy}{y^3}\right]$$

$$= A\left[\ln y + \frac{600}{y} - \frac{90000}{2y^2}\right]_{300}^{840} = 3.11 \ cm$$

- در صورتیکه امکان انتگرال گیری سریع وجود نداشته باشد، استفاده از انتگرال گیری های عددی توصیه می شود. (در کتاب روش ارائه شده)

۵) سازه با اعضای شیبدار

در سازه نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را محاسبه کنید. (فقط اثر تغییر شکل های خمشی منظور گردد)

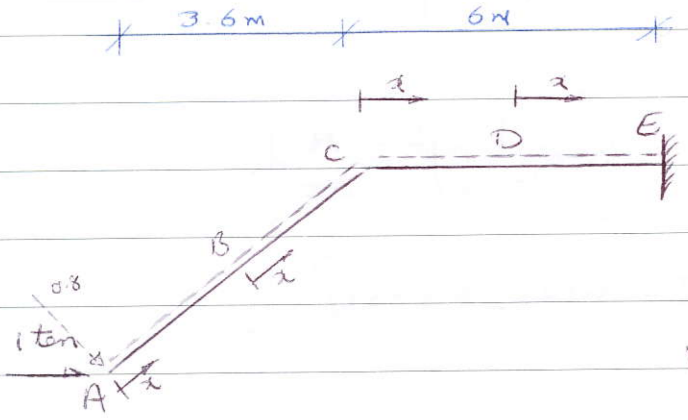


$E = 2100 \ ton/cm^2$

$$\begin{cases} I_1 = 15625 \ cm^4 \\ I_2 = 7810 \ cm^4 \end{cases}$$

$\sin\alpha = 0.8 \qquad \cos\alpha = 0.6$

در اعضای شیبدار انتگرال می‌بایستی در طول کامل عضو شیبدار گرفته شود و از تصویر عضو مایل استفاده نکنیم. چون این انتگرال نشان دهنده کار داخلی ناشی از نیرو کوپل مجازی داخلی است و این کار باید در طول کامل عضو محاسبه گردد.



$$1 \times \delta_A = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

$B \to A: \quad M = 0 \qquad \bar{m} = 0.8x \ ton.m \qquad 0 < x < 3$

$C \to B: \quad M = 0.36x \qquad \bar{m} = 2.4 + 0.8x \ ton.m \qquad 0 < x < 3$

$D \to C: \quad M = 1.08 \ ton.m \qquad \bar{m} = 4.8 \ ton.m \qquad 0 < x < 3$

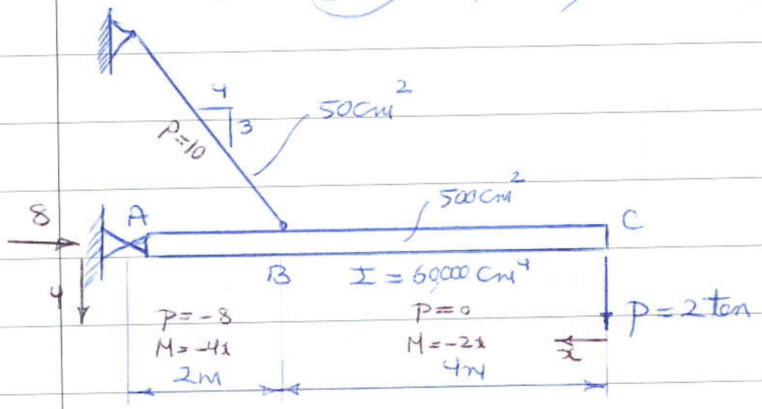
$E \to D: \quad M = 1.08 + 0.9x \qquad \bar{m} = 4.8 \ ton.m \qquad 0 < x < 3$

$$E\delta_A = \int_0^3 \frac{(2.4+0.8x)(0.36x)}{7810 \times 10^{-8}} dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.08)}{15625 \times 10^{-8}} dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.08+0.9x)}{15625 \times 10^{-8}} dx$$

$$= \frac{64.156}{15625 \times 10^{-8}} \Rightarrow \delta_A = 1.96 \ cm$$

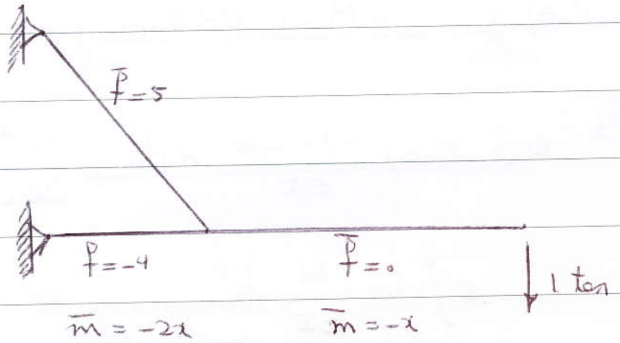
۶) سازه‌های ترکیبی:

سازه‌هایی را گویند که در آن‌ها هم اعضای خمشی و هم اعضای محوری وجود دارد. در این نوع سازه‌ها حتی اگر در صورت مسئله ذکر نشده باشد، انرژی محوری همراه با انرژی خمشی باید منظور گردد.



در سازه شکل داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را محاسبه نمایید.

$$\bar{1} \times \Delta_C^{\downarrow} = \sum \bar{f}\,\frac{PL}{EA} + \int_0^L \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$



عضو	$\bar{f}$ ton	P ton	L cm	A cm²	$\bar{f}\frac{PL}{A}$
DB	+5	+10	250	50	250
AB	-4	-8	200	500	12.8
				Σ	262.8 ton²/cm

$$\sum \bar{f}\,\frac{PL}{EA} = \frac{262.08}{700} = 0.375\ \text{ton.cm}$$

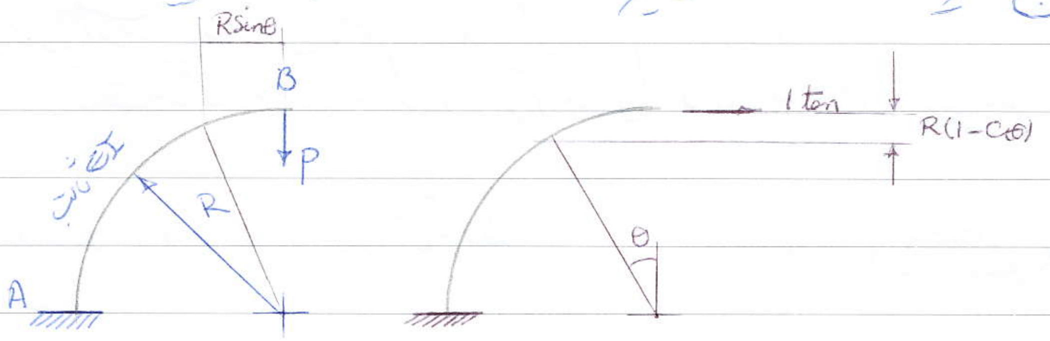
$$\int_0^l \frac{\bar{m}M\,dx}{EI} = \int_0^{200}\frac{(-2x)(-4x)dx}{EI} + \int_0^{400}\frac{(-x)(-2x)dx}{EI} = 1.525\ \text{ton.m}$$

$$1 \times \Delta = 0.375 + 1.525 = 1.9\ \text{cm}$$

۷) سازه با اعضای منحنی:

در سازه با اعضای منحنی شکل همانطور که گفته شد، حد انتگرال باید در امتداد شکل انجام پذیرد. بر همین ترتیب چنانچه سازه اعضای قوسی (منحنی) داشته باشد بر حسب انتگرال به جای جزء طول dx باید از جزء طول ds استفاده نمود. بدین ترتیب تمام انتگرال‌گیری‌های موجود در روابط انرژی و کار مجازی معتبر می‌باشد، با این تفاوت که به جای dx باید از ds استفاده نمود.

مثال: در طاق ربع دایره شکل داده شده تغییر مکان افقی نقطه B را بدست آورید.



$$1 \times \vec{\Delta}_B = \int_0^S \bar{m} \frac{M}{EI} ds$$

در شکل دایره بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود.

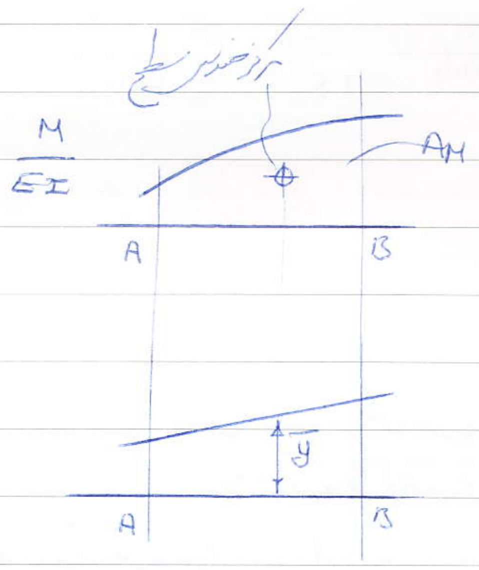
$ds = R d\theta$ $\qquad m = -R(1-C\theta)$ $\qquad M = -PR\sin\theta$

$$1 \times \Delta = \int_0^L \bar{m} \frac{M ds}{EI} \Rightarrow \Delta = \int_0^{\pi/2} -R(1-C\theta) \frac{-PR\sin\theta}{EI} R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

حل عددی: $\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$

در حالتی که تا به حال دنبال کردیم سعی بر این بود که انتگرال فوق بصورت تحلیلی حل شود. به جای این کار می‌توان اقدام به رسم نمودارهای M و $\bar{m}$ نمود و انتگرال را به کمک این نمودارها حل نمود. دو روش در این میان متداول است.

۱) روش مور:



$$\int_A^B \bar{m} \frac{M}{EI} dx = A_M \cdot \bar{y}$$

$\bar{y}$: مقدار $\bar{m}$ در زیر مرکز هندسی سطح $\frac{M}{EI}$

در فاصله AB توابع $\bar{m}$، M و I باید پیوسته و ملایم باشند.

۲) روش ذوزنقه:

$$\int \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx = \frac{h}{6EI}\left[A_0+4A_m+A\right]$$

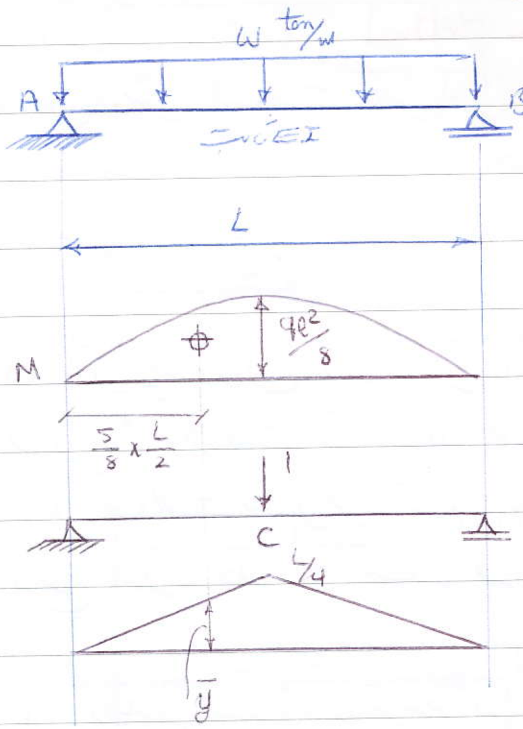
A_0: حاصلضرب $\bar{m}.M$ در ابتدای قطعه

A_M: " " " در وسط "

A: " " " در انتهای "

h: طول قطعه

در طول h باید I ثابت باشد و $\bar{m}$ و M پیوسته و یکنواخت باشد.



$$1\times\Delta_C = \int_A^B \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx = 2\int_A^C \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

روش عمده

$$\bar{y} = \frac{5}{8}\times\frac{L}{4} = \frac{5}{32}L$$

$$A_m = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{wL^2}{8EI}\right]$$

$$\Delta_C = 2\times\frac{5}{32}L\times\frac{wL^3}{24EI} = \frac{5}{384}\,\frac{wL^4}{EI}$$

روش ذوزنقه

$$A_0=0 \qquad A_m = \frac{L}{8}\times\frac{3}{32}wL^2 \qquad A = \frac{L}{4}\times\frac{wL^2}{8}$$

$$\Delta_C^{\downarrow} = 2\left(\frac{L}{6\times 2}\right)\frac{1}{EI}\left(0+4\times\frac{L}{8}\times\frac{3}{32}wL^2+\frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{4}\right) = \frac{5}{384}\,\frac{wL^4}{EI}\downarrow$$

حمید کاظم

فصل ششم

تحلیل سازه‌های نامعین

سازه‌های نامعین دسته بزرگی از سازه‌ها را تشکیل می‌دهند که با توجه به خصوصیات مثبت آن که مورد توجه مهندسین نیز می‌باشد. تحلیل سازه‌های نامعین با استفاده از معادلات تعادل استاتیک و شرایط قابل اعمال آن ممکن نمی‌باشد و تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می‌باشد. برای آن‌ها باید معادلات کمکی در نظر گرفت. بر حسب چگونگی انتخاب مجهولات و معادلات کمکی دو فلسفه عمومی برای تحلیل سازه‌های نامعین وجود دارد.

۱) روش نیرو (نرمی) Force Method , Flexibility Method

در این روش مجهولات واکنش‌های تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی در نظر گرفته می‌شوند. معادلات اضافی نیز از معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها در نظر گرفته می‌شوند. تکیه بر در این فصل ارائه خواهد شد همین روش می‌باشد.

۲) روش تغییر مکان (روش سختی) Displacement Method , Stiffness Method

در این روش مجهولات تغییر مکان‌ها و دوران‌های تکیه‌گاهی در نظر گرفته می‌شود و معادلات اضافی شامل معادلات تعادل می‌باشند. اساس این روش معادلات شیب افت می‌باشد که موضوع درس تحلیل ۲ است. در کنار این روش توزیع لنگر کراس، روش تکرار کانی، روش‌های عددی برای حل معادلات شیب افت هستند. در ادامه در تحلیل ماتریسی سازه‌ها هر دو این دو فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی برتری در تحلیل ماتریسی روش سختی است.

روش نیرو — روش سازگاری تغییر شکل‌ها ← روش نرمی

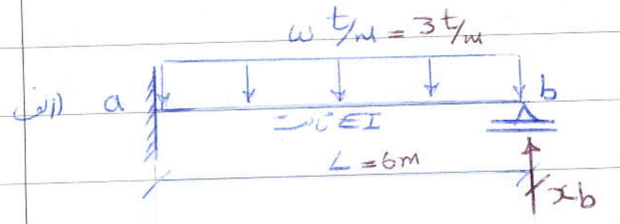
برنامه درس ما برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده از روش نیرو یا سازگاری تغییر شکل‌هاست. در این روش ابتدا درجه نامعینی سازه باید تشخیص داده شود. اگر در این امر مشکلی بوجود آید، در ادامه حل مسئله بی‌فایده خواهد بود.
به تعداد درجات نامعینی باید معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها را نوشت تا سازه قابل تحلیل باشد. طی مثال‌های متعدد روش کار ارائه می‌گردد. در تحلیل سازه‌های نامعین به چند نکته باید توجه داشت.

۱) برای تحلیل سازه‌های نامعین از خواص الاستیک اعضا مثل مدول الاستیسیته E، G و مشخصات هندسی مقطع مثل A و I استفاده می‌گردد. بنابراین این مقادیر در نتایج تأثیر دارند.

۲) تحلیل در محدوده الاستیک خطی است. یعنی جابجایی در σ و ε نسبت خطی دارند ($\sigma = E\varepsilon$)

۳) کسی که سازه نامعین تحلیل می‌نماید باید تجربه کافی در مورد تغییر شکل‌ها داشته باشد.

مراحل تحلیل سازه نامعین به کمک سازگاری تغییر شکل‌ها:

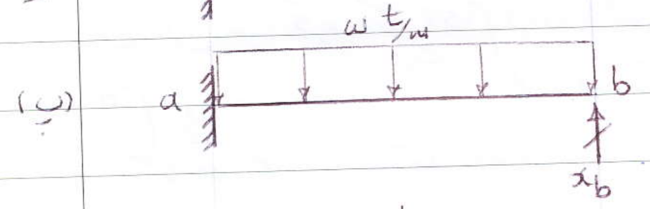


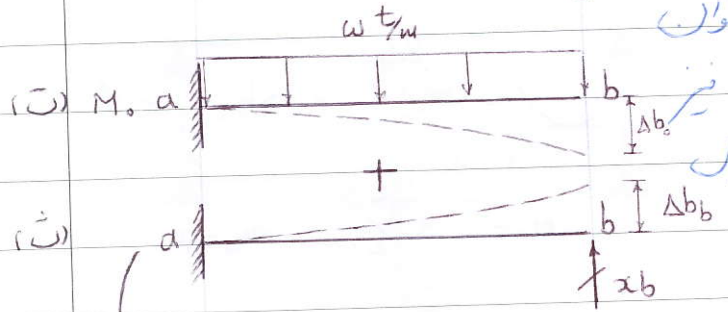
گام ۱: تعیین درجه نامعینی

در این مثال درجه نامعینی $n=1$ می‌باشد.

گام ۲: انتخاب مجهول اضافه

به تعداد درجات نامعینی می‌بایستی مجهول اضافه انتخاب کنیم. انتخاب مجهولات اضافی دلخواه است، ولی باید دقت نمائیم که سازه‌ای که پس از حذف مجهول اضافه باقی می‌ماند پایدار و معین باشد. (مجهول اضافه Redundent) در مثال مورد بحث واکنش تکیه‌گاهی نقطه B به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد. البته انتخاب M_a نیز می‌تواند صحیح باشد ولی در هر حال در انتخاب مجهول اضافه سهولت کار نیز باید مورد توجه باشد.



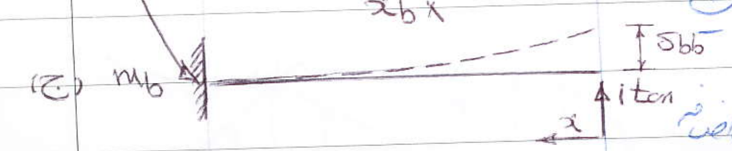


گام ۳: سازه اولیه (primary structure):

سازه‌ای که بعد از حذف مجهول اضافه و بارهای خارجی باقی می‌ماند به سازه اولیه معروف است. این سازه باید پایدار و معین باشد.

$$\Delta_b = \Delta_{b_0} + \Delta_{bb} = 0$$

$x_b \times$



گام ۴: اکنون سازه اولیه تحت بار خارجی و مجهول اضافه در نظر گرفته می‌شود. از این لحظه به بعد مجهول اضافی هم شریک بارهای خارجی محسوب می‌شود.

$$\Delta_{bb} = x_b\,\delta_{bb}$$

$$\Delta_{b_0} + x_b\,\delta_{bb} = 0$$

$$\rightarrow x_b = -\frac{\Delta_{b_0}}{\delta_{bb}}$$

گام ۵: اکنون سازه اولیه تحت بار خارجی و مجهول اضافه به دو سازه تجزیه می‌شود. سازه اول: سازه اولیه تحت

بارهای خارجی در سازه دوم یا سازه اولیه تحت مجهول اضافی می‌باشد. ترکیب این دو سازه باید سازه واقعی حاصل باشد که در یکی از آن‌ها مجهول x_b وجود دارد. برای تعیین مجهول x_b باید از یک شرط سازگاری استفاده نمود.

گام ۶: نوشتن معادله سازگاری تغییرشکل:

دو سازه تجزیه شده دارای تغییرشکل‌های مشابه شکل می‌باشند. در سازه اول تغییرمکان قائم نقطه b (که حتماً در امتداد مجهول اضافی است) با حرف Δb_0 نشان داده می‌شود. اندیس اول نشانه نقطه و اندیس دوم نشان‌دهنده حالت است ($x_b = 0$) و تغییرمکان قائم نقطه b ناشی از Δ_{bb} نشان داده می‌شود که اندیس اول نشان‌دهنده نقطه و اندیس دوم نشان‌دهنده حالت است. برای اینکه مجموع این دو سازه برابر سازه اصلی باشد مجموع این دو تغییرمکان باید برابر صفر باشد. معادله نوشته شده معادله سازگاری تغییرمکان گویند. از این معادله حل شود x_b بدست می‌آید و برای اینکه این معادله ساده‌تر حل شود می‌توان یک تجزیه دیگر انجام داد.

گام ۷: با محاسبه تغییرمکان‌ها، مقدار مجهول اضافه قابل تعیین است. برای محاسبه تغییرمکان‌ها از هر روشی می‌توان استفاده نمود.

محاسبه Δb_0: روش کار مجازی   ح = سازه مجازی   ت = سازه واقعی

$$1 \times \Delta b_0^{\uparrow} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \int_0^6 m_b \frac{M_0}{EI} dx \qquad M_0 = -3\frac{x^2}{2} \ , \quad m_b = x$$

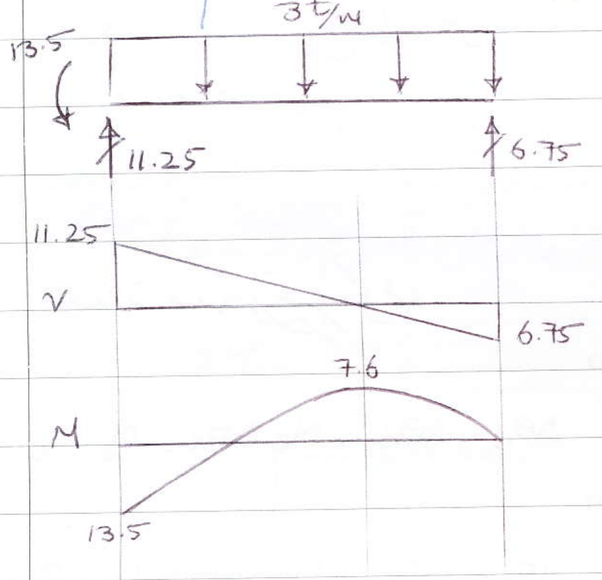
$$1 \times \Delta b_0^{\uparrow} = \int_0^6 (x)\left(-\frac{3x^2}{2}\right) dx = \frac{-486}{EI}$$

محاسبه δ_{bb}:   ح = سازه مجازی   ح = سازه واقعی

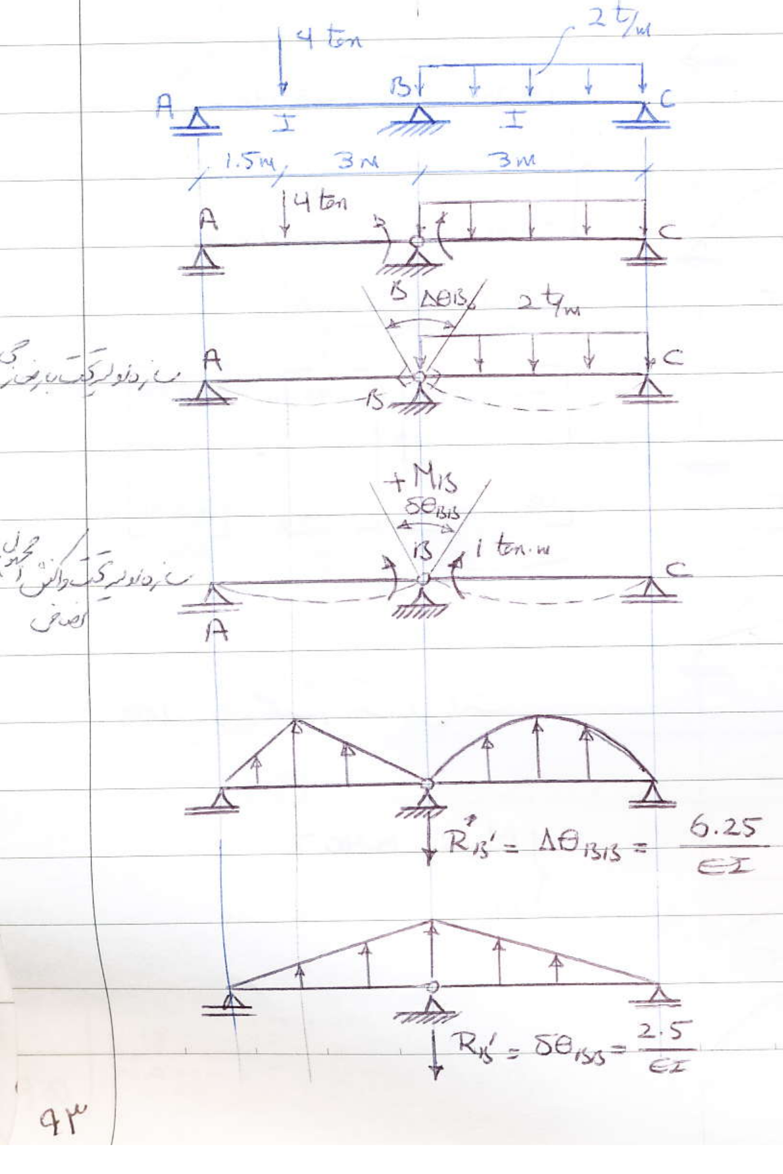
$$1 \times \delta_{bb}^{\uparrow} = \int_0^6 m_b \cdot \frac{m_b}{EI} dx = \int_0^6 x \frac{x}{EI} dx = \frac{72}{EI}$$

$$-\frac{486}{EI} + x_b \frac{72}{EI} = 0 \Rightarrow x_b = 6.75 \Rightarrow R_b = 6.75\ ton\uparrow$$

اگر R_b مثبت بدست آید یعنی آن است که این واکنش در امتداد بار واحد می‌باشد.
پس از تعیین R_b بار واکنش نامعین تعیین شده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می‌گردد.



یکی از مزایای مثبت سازه نامعین کاهش نیروهای داخلی آن است. به عنوان مثال اگر این سازه خود از نوع دو واکنش R_b وجود نداشت حداکثر لنگر آن در نقطه a ، 54ton.m می‌شد که با مقدار بدست آمده قابل مقایسه نیست.

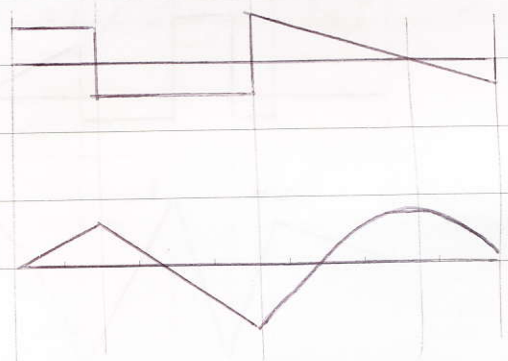


گام ۱) n=1

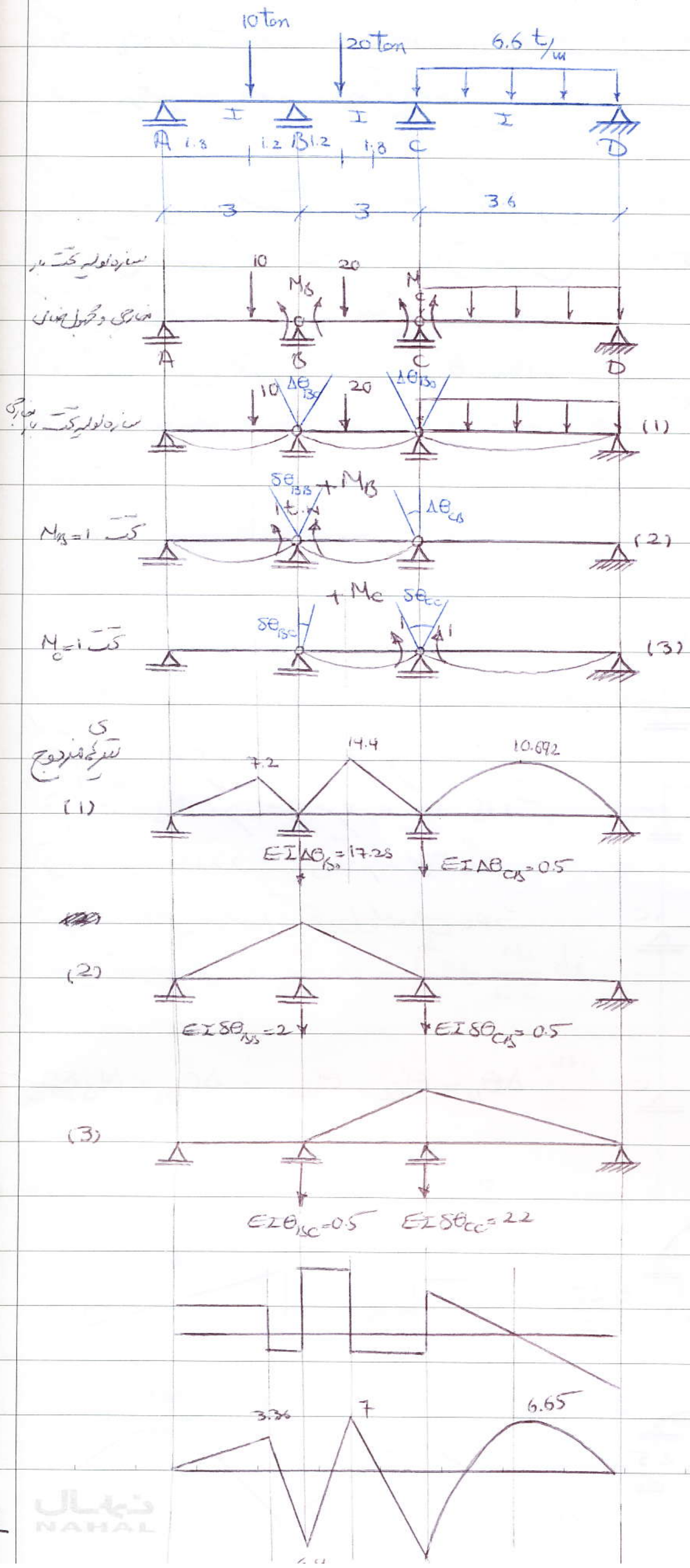
گام ۲) M_B لنگر داخلی تیر در تکیه‌گاه B است.
تجربه نشان داده در تیرهای سراسری انتخاب لنگر تکیه‌گاهی به عنوان مجهول اضافی باعث راحتی کار می‌شود.

$$\Delta\theta_B = \theta_{BL} - \theta_{BR} = \Delta\theta_{B_0} + M_B\,\delta\theta_{BB}$$

$$\frac{6.25}{EI} + M_B\cdot\frac{2.5}{EI} = 0 \rightarrow M_B = -2.5\ ton.m$$



تیر سراسری با دو درجه نامعینی :



در تجزیه سازه اولیه برای هر مجهول اضافی به طور جداگانه عمل می کنیم

معادلات سازگاری تغییر شکل ها :

$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{B0} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{C0} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\begin{cases} 17.28 + 2M_B + 0.5M_C = 0 \\ 22.91 + 0.5M_B + 2.2M_C = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2.2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نرمی}} \begin{bmatrix} M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.28 \\ 22.91 \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمی همیشه متقارن است

$$\begin{cases} M_B = -6.40 \text{ ton.m} \\ M_C = -8.96 \text{ ton.m} \end{cases}$$

تحلیل خرپاهای نامعین :

خرپا می‌تواند به یکی از ۳ حالت زیر نامعین باشد.

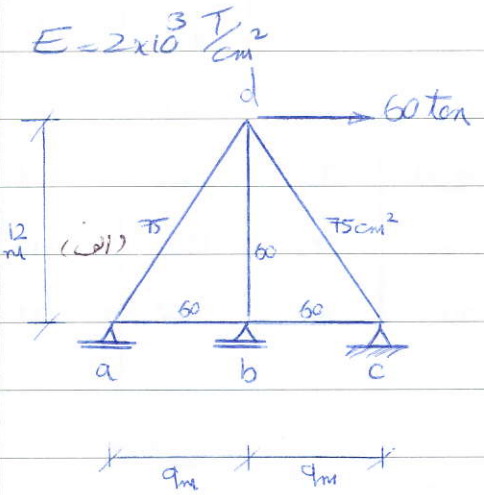
۱) نامعین خارجی : در این حالت مجهول اضافه یکی از واکنش‌های تکیه‌گاهی انتخاب می‌گردد.

۲) نامعین داخلی : وقتی است که نامعینی بعلت نیروهای داخلی اعضا باشد، در این حالت مجهول اضافه نیروی داخلی عضو انتخاب می‌گردد.

۳) نامعین خارجی و داخلی : در این حالت نامعینی بعلت وجود تکیه‌گاه‌های اضافه و هم‌چنین اعضای اضافی می‌باشد و مجهول اضافه ترکیبی از واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی خواهد بود.

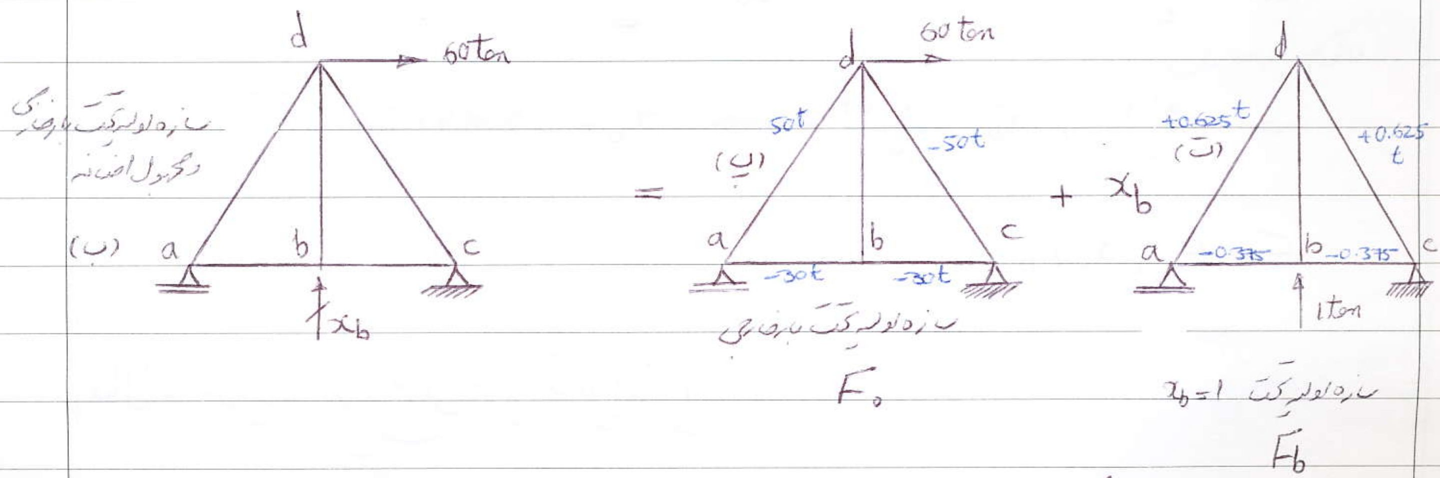
مثال ۱ : خرپای نامعین خارجی زیر را تحلیل کنید.

خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین خارجی است. واکنش تکیه‌گاهی b به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد.



معادلات سازگاری تغییر شکل :

$$\Delta_b^{\uparrow} = \Delta_{b0}^{\uparrow} + X_b\,\delta_{bb}^{\uparrow} = 0$$



۱) محاسبه $\Delta_{b0}^{\uparrow}$ (روش کار مجازی) : ت : سازه مجازی پ : سازه حقیقی

$$1\times\Delta_{b0}^{\uparrow} = \sum F_b \frac{F_0 L}{EA} = \frac{1}{E}\sum F_b \frac{F_0 L}{A}$$

۲) محاسبه δ_{bb} (کار مجازی):   ت : سازه معین کمکی

$$1 \times \delta_{bb} = \sum \frac{F_b^2 L}{EA} = \frac{1}{E} \sum \frac{F_b^2 L}{A}$$

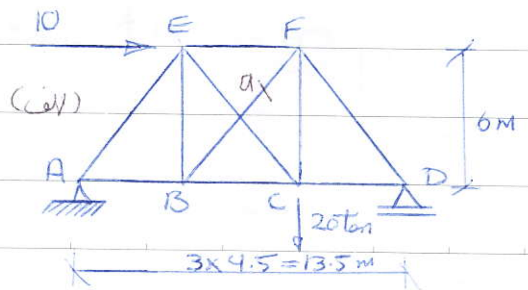
$F=F_0+X_bF_b$ ton	$F_b^2 L/A$ ton^2/cm	$F_0F_b L/A$ ton^2/cm	F_b ton	F_0 ton	L/A $1/cm$	A cm^2	L cm	عضو / واحد
−26.82	+2.11	+168.6	−0.375	−30	15	60	900	ab
−26.82	+2.11	+168.6	−0.375	−30	15	60	900	bc
+44.7	+7.81	+625	+0.625	+50	20	75	1500	ad
−55.3	+7.81	−625	+0.625	−50	20	75	1500	dc
+8.47	+20	0	−1	0	20	60	1200	bd
	+39.84	+337.2						

$$\Delta_{b0} = \frac{337.2}{E} \qquad \delta_{bb} = \frac{39.84}{E}$$

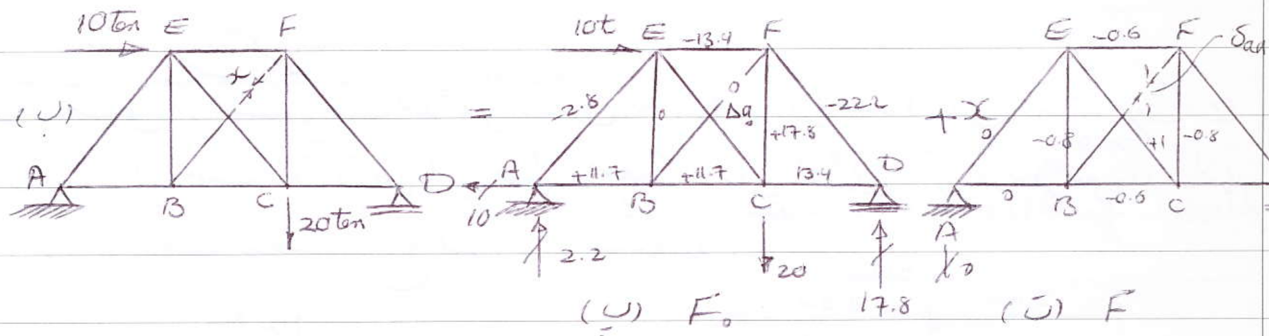
$$\Rightarrow \frac{337.2}{E} + X_b \frac{39.84}{E} = 0 \Rightarrow X_b = -8.47\ ton$$

$$F = F_0 + X_b F_b$$

مثال ۲: خرپای نامعین داخلی زیر را تحلیل کنید.



خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین داخلی است. نیروی داخلی عضو BF به عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌شود. سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافی به صورت شکل نشان داده شده می‌باشد.



$$\Delta a^* = \Delta a_0 + x\,\delta_{aa} = 0$$

سازه واقعی (ت)

سازه مجازی (پ)

(ت) واقعی — (پ) مجازی — می‌شود Δa_0

$$1 \times \Delta a_0^* = \frac{1}{E}\sum F_0 \frac{fl}{EA}$$

واقعی، مجازی ← (ت) — می‌شود δ_{aa}

$$1 \times \delta_{aa}^* = \frac{1}{E}\sum \frac{f^2 L}{EA}$$

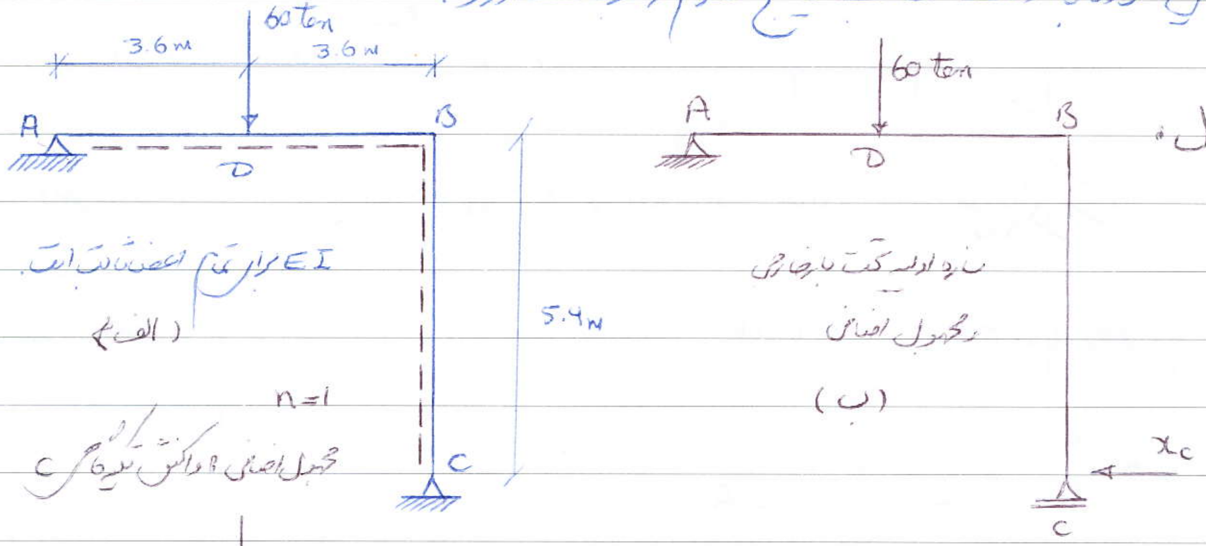
با توجه به جدول در کتاب

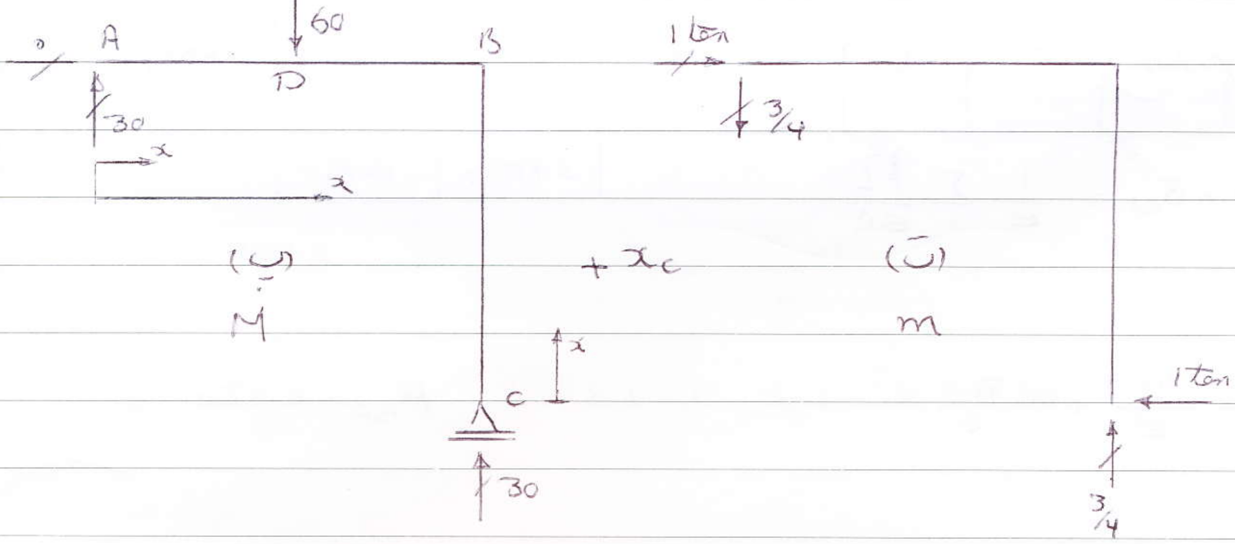
$$-\frac{119.7}{E} + x\frac{51.8}{E} = 0 \longrightarrow x = 2.3 \qquad F_{BF} = 2.3\ \text{ton}$$

تحلیل قاب‌های نامعین:

قاب‌ها متشکل از اعضایی تحت تنش خمشی و نیروی برشی و بعضی از اعضای آن تحت نیروی محوری نیز قرار دارند. در اغلب اوقات می‌توان فقط با منظور کردن انرژی ناشی از تغییر خمشی آن‌ها کفایت نموده و با دقت مناسب نتایج لازم را بدست آورد.

مثال:





$$\overleftarrow{\Delta_C} = \overleftarrow{\Delta_{C0}} + x_C \overleftarrow{\delta_{CC}} = 0$$

سازگاری: ت   محقق: ب   محاسبه $\overleftarrow{\Delta_{C0}}$:

$$\Delta_{C0} = \int m \frac{M}{EI} dx = \int_A^D + \int_D^B + \int_C^B$$

ناحیه AD: $0 < x < 3.6 \Rightarrow M = 30x \qquad m = -\frac{3}{4}x$

ناحیه DB: $3.6 < x < 7.2 \Rightarrow M = 30x - 60(x - 3.6) \qquad m = -\frac{3}{4}x$

CB ناحیه : $0 < x < 5.4$ $\quad M = 0 \quad m = -x$

$$\Delta c_0 = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{3.6}(30x)(-0.75x)\,dx + \int_{3.6}^{7.2}(-30x+216)(0.75x)\,dx + \int_0^{5.4}(0)(-x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\left[-0.75x^3\right]_0^{3.6} + \left[7.5x^3 - 81x^2\right]_{3.6}^{7.2}\right) = -\frac{1050}{EI}$$

تحقیق مجازی : ت $\qquad$ محاسبه δ_{cc} :

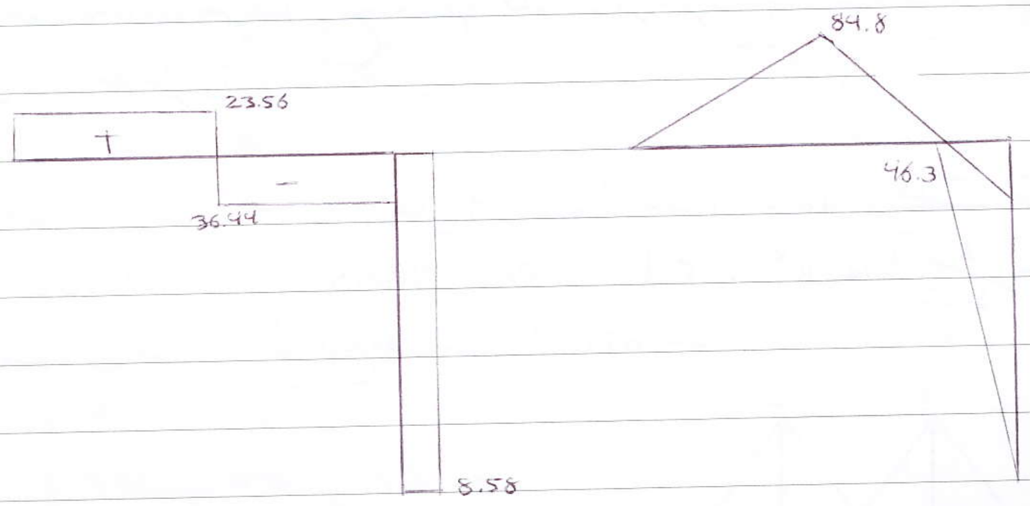
$$\delta_{cc} = \int \frac{m^2}{EI}\,dx = \int_A^B + \int_C^B$$

AB ناحیه : $0 < x < 7.2$ $\quad m = -\frac{3}{4}x$

BC ناحیه : $0 < x < 5.4$ $\quad m = -x$

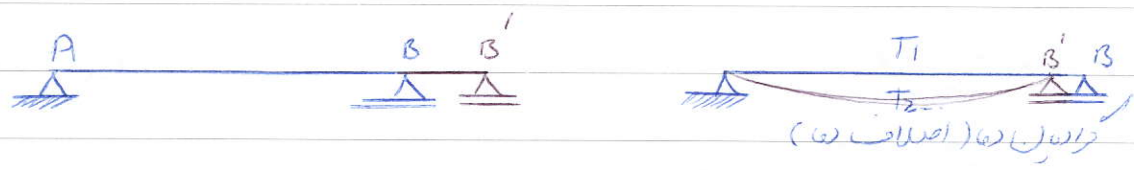
$$\rightarrow \delta_{cc} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{3.6\times 2}(-0.75x)^2\,dx + \int_0^{5.4}(-x)^2\,dx\right) = \frac{122.5}{EI}$$

$$-\frac{1050}{EI} + \frac{122.5}{EI}x_c = 0 \rightarrow x_c = 8.58 \rightarrow R_{cx} = 8.58\ \text{ton} \leftarrow$$



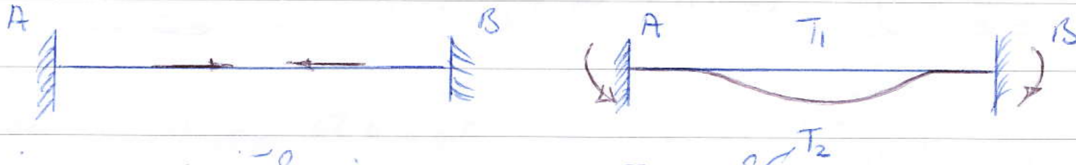
اثر حرارت و نشست تکیه‌گاهی در سازه‌های نامعین

تأثیر حرارت و نشست تکیه‌گاهی را در فصل پنجم (در سازه‌های معین) مطالعه کردیم. ملاحظه شد که در سازه‌های معین، در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی فقط تغییر شکل ایجاد می‌شود و هیچگونه نیروی داخلی بوجود نمی‌آید. زیرا سازه معین در مقابل تغییر شکل آزاد است. موضوع را می‌توانیم با بررسی یک تیر ساده دید. در آن ملاحظه می‌شود که تغییرات دما هیچ تأثیری بر نیروهای داخلی ندارد.



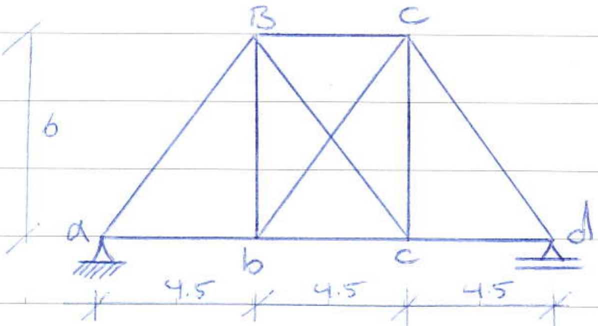
$T_2 > T_1$

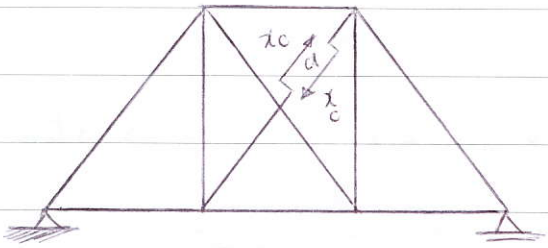
اما در سازه‌های نامعین، شرایط متفاوت است. به علت قیدهایی که بطور ذاتی در سازه‌های نامعین وجود دارد در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی، سازه قادر به تغییر شکل طبیعی خود نیست و برای انطباق با شرایط تغییر شکلی، در آن تنش و نیروی داخلی ایجاد می‌گردد. موضوع را می‌توان با همان مثال تیر ساده که اکنون نامعین شده تحقیق نمود.



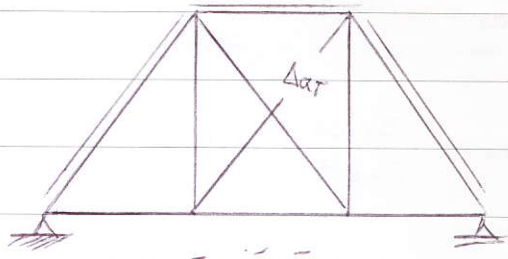
در این قسمت با استفاده از اصل جمع آثار قوا تحلیل سازه‌های نامعین در اثر تغییرات دما و همچنین نشست تکیه‌گاهی مورد توجه قرار می‌گیرد.

مثال: مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی بوجود آمده در اعضای خرپای زیر به علت افزایش دما به میزان $33^\circ c$ در اعضای ab، bc، cd. $\alpha_T = \frac{1}{84000} = 12\times10^{-6}$. $E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$ است. سطح مقطع کلیه اعضا $65\ cm^2$ است.





(ب) سازه اولیه



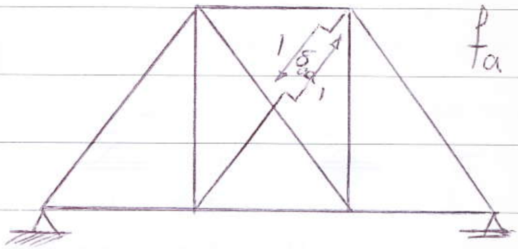
سازه اولیه تحت تغییرات دما (پ)

n=1 و نیروی عضو bC به عنوان مجهول اضافی

$+$

x_c

$$\Delta_a^* = \Delta_{aT}^* + x_c\,\delta_{aa}^* = 0$$



(ت)

محاسبه Δ_{aT} : (حقیقی پ، مجازی ت)

$$1\times\Delta_{aT}^* = \sum f_a \cdot \Delta L$$

$$\Delta L = \alpha_t L(\Delta T)$$

$$1\times\Delta_{aT} = \alpha_t \sum f_a(\Delta T)L$$

محاسبه δ_{aa}^* : (حقیقی و مجازی ت)

$$1\times\delta_{aa}^* = \frac{1}{E}\sum\frac{f_a^2 L}{A}$$

عضو رابط	L/A 1/cm	f_a ton	$f_a^2\frac{L}{A}$	ΔT c°	$f_a\Delta T L$ ton.c°.cm	$F=F_0+x_a f_a$ ton
BC	6.92	-0.6	2.49	33	-8910	-3.18
bc	6.92	-0.6	2.49	0	0	-3.18
Bb	9.23	0.8	5.91	0	0	-4.24
Cc	9.23	0.8	5.91	0	0	-4.24
Bc	11.54	1	11.54	0	0	5.3
bC	11.54	1	11.54	0	0	5.3
Σ			39.88		-8910	

اعضای f_a صفر نوشته نشده اند.

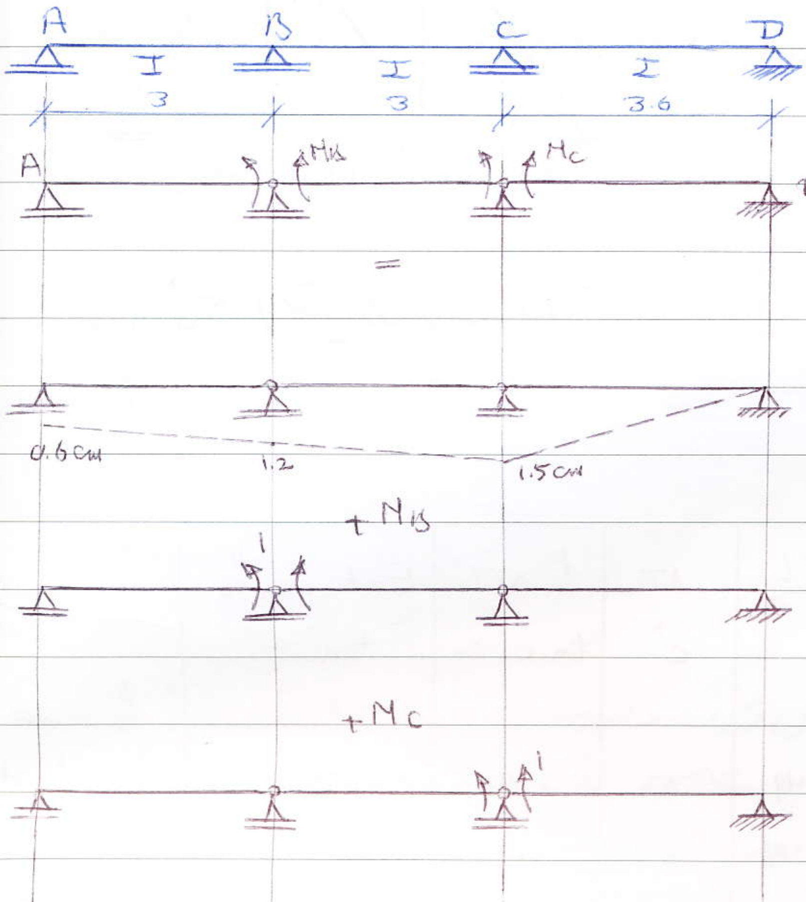
$$\Delta_{aT}^{*} = -8910\left(\frac{1}{84000}\right) = -0.106\ cm$$

$$\delta_{aa} = \frac{39.88}{2\times10^{3}} = 0.02 \quad \rightarrow -1.06 + 0.02x = 0 \quad \rightarrow x = 5.3\ ton$$

سازه نامعین تحت نشست تکیه‌گاهی

مثال: نیروهای داخلی را به علت نشست تکیه‌گاهی بدست آورید.

$$\begin{cases} A = 0.6\,cm \downarrow \\ B = 1.2\,cm \downarrow \\ C = 1.5\,cm \downarrow \\ D = 0 \end{cases}$$



$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{BS} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{CS} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\theta_{AB} = -\frac{1.2-0.6}{300} = -0.002$$

$$\theta_{BC} = (-1)\frac{1.5-1.2}{300} = -0.001$$

$$\theta_{CD} = \frac{1.5}{300} = 0.004167$$

$$\Delta\theta_{BS} = \theta_{BL} - \theta_{BR} = -0.001$$

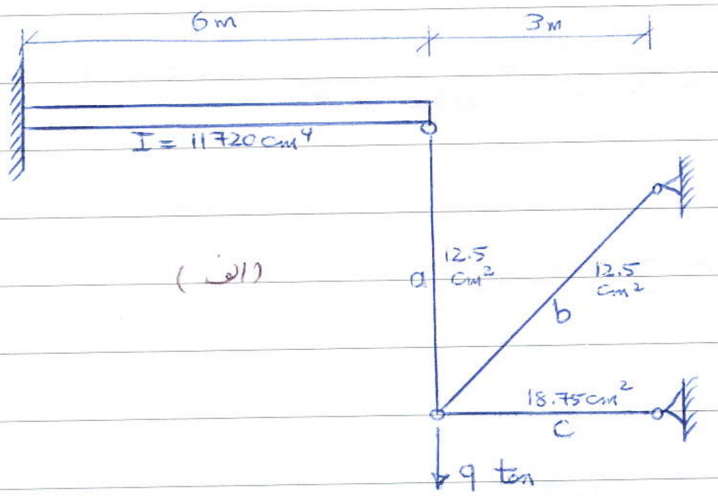
$$\Delta\theta_{CS} = \theta_{CL} - \theta_{CR} = -0.005167$$

$$\begin{cases} -0.001 + \dfrac{2}{EI}M_B + \dfrac{0.5}{EI}M_C = 0 \\[2ex] -0.005167 + \dfrac{0.5}{EI}M_B + \dfrac{2.2}{EI}M_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} M_B = -0.000092\ EI \\[2ex] M_C = +0.00237\ EI \end{array}$$

سازه‌های ترکیبی نامعین:

در سازه‌های ترکیبی نامعین همواره باید اثر انرژی‌های محوری و خمشی در نظر گرفته شود.

مثال:



(الف)

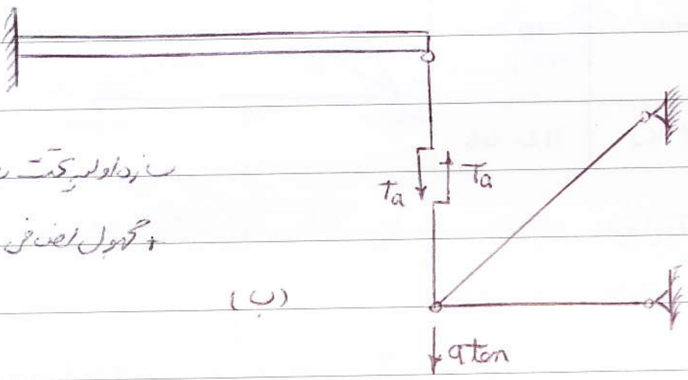
$D = 1$

نیروی عضو a به عنوان مجهول اضافی

$$\Delta a = \Delta a_0 + T_a\,\delta_{aa} = 0$$

محاسبه Δa_0 از حالت پ و مجازی ت

$$E\Delta a_0 = \int m_a \frac{M_0}{I}\,dx + \sum f_a \frac{F_0}{A} L$$



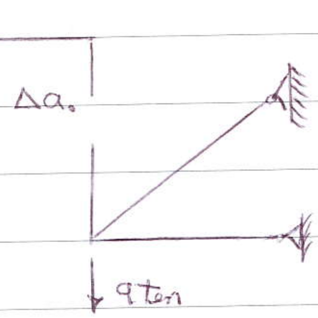
سازه اولیه که تحت بار خارجی + مجهول اضافی

(ب)

محاسبه δ_{aa} از حالت ت و مجازی ت

$$E\delta_{aa} = \int \frac{m_a^2}{I}\,dx + \sum \frac{f_a^2}{A} L$$

واحد نیرو تن و طول cm

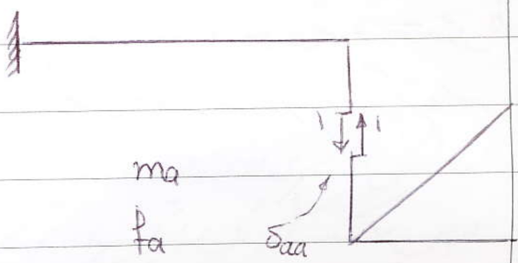


M_0

F_0

(پ)

$+\ T_a$



m_a

f_a

(ت)

محاسبه مقادیر انتگرال :

$M_0 = 0 \qquad m_a = -x$

$\int \frac{M_0 m_a}{I} dx = 0$

$$\int_0^{600} \frac{m_a^2}{I} dx = \int_0^{600} \frac{x^2}{I} dx = \frac{1}{I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{600} = \frac{1}{11720} \times \frac{600^3}{3} = 6143.34$$

عضو واحد	L/A	F_0	f_a	$f_a F_0 \frac{L}{A}$	$f_a^2 \frac{L}{A}$
a	28.8	0	1	0	28.8
b	33.94	12.73	-1.414	-610.93	67.86
c	16	-9	1	-144	16
				-754.93	112.66

$-754.93 + (6143.34 + 112.60)\, T_a = 0$

$T_a = 0.12$

$T_b = 12.73 - 1.414 \times 0.12 = 12.56 \text{ ton} \qquad T_e = -9 + 1 \times 0.12 = -8.88 \text{ ton}$

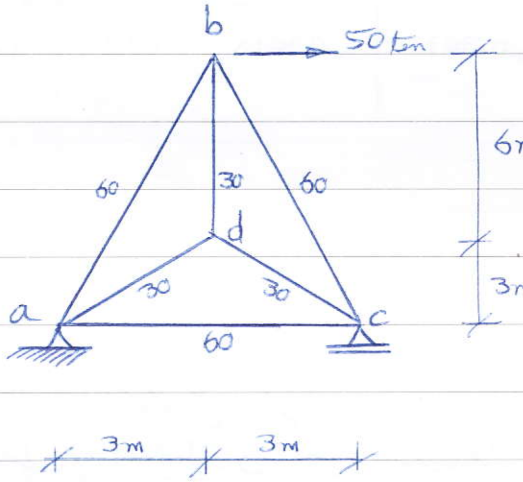
از نیروی خارجی 9t فقط 0.12 ton به تیر کشش می‌رسد و باقی آن توسط b و c گرفته می‌شود به خصوص b.
این موضوع یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های سازه‌های نامعین است، یعنی عضوی که سخت‌تر است نیروی بزرگتر و عضو نرم‌تر سهم کوچکتری را می‌برد.

روش کار حداقل:

از قضیه تغییر شکل کاستیلیانو می‌توان به طور مستقیم برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده کرد. در این روش نیاز به معادلات سازگاری تغییر شکل هم نداریم. به همین علت ممکن است به نظر دانشجویان ساده‌تر بیاید ولی این روش چند محدودیت دارد.

۱) نمی‌توان سازه نامعین را تحت اثر حرارتی و نشست تکیه‌گاهی تحلیل نمود.

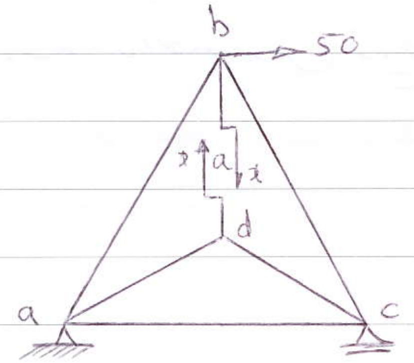
۲) کارهای بیشتری نیاز دارد و اگر بخواهیم به تکنیک‌های عددی متوسل شویم، در حقیقت همان روش سازگاری تغییر شکل خواهد شد.



مثال:

$n=1$ نیروی عضو bd به عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌شود.

در این مرحله به جای نوشتن روابط سازگاری تغییر شکل‌ها قضیه کاستیلیانو را برای تعیین تغییر مکان مربوط به مجهول اضافه اعمال می‌کنیم که همان روابط سازگاری است.



$$\Delta_a^t = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

اما شکل ظاهری معادله فوق مشتق گیری نسبت به x است، بدین معنا که اگر از آن را مشتق بگیریم این یعنی زمانی رخ دهد که مقدار مجهول اضافه باید طوری باشد که به ازای آن تابع انرژی حداقل گردد. از این لحاظ به این روش کار حداقل گوییم.

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2EA}$$

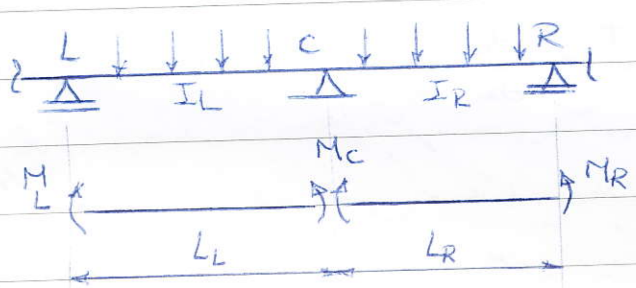
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} \sum \frac{FL}{A} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$F\frac{L}{A}\frac{\partial F}{\partial x}$ ton/cm	$\partial F/\partial x$ ton/cm	F ton	L/A 1/cm	عضو واصل
$-660+4.41x$	-0.529	$79-0.529x$	15.8	ab
$+660+4.41x$	-0.529	$-79-0.529x$	15.8	bc
$-83.3+1.11x$	-0.333	$25-0.333x$	10	ca
$7.05x$	$+0.707$	$+0.707x$	14.1	ad
$+20x$	$+1$	$+x$	20	bd
$+7.05x$	$+0.707$	$+0.707x$	14.1	cd
$-83.3+44.03x$				

$$\Rightarrow x = \frac{53.3}{44.03} = 1.89 \text{ ton}$$

رابطه ۳ لنگر

در قرن ۱۹ میلادی یک مهندس فرانسوی به نام کلاپیرون رابطه‌ای بین سه لنگر تکیه‌گاهی متوالی از یک تیر سراسری برقرار نمود و مدت‌ها این روش برای تحلیل تیرهای سراسری استفاده می‌شد. با ابداع روش توزیع لنگرهای کراس این روش منسوخ شد.



$$M_L\frac{L_L}{I_L}+2M_C\left(\frac{L_L}{I_L}+\frac{L_R}{I_R}\right)+M_R\frac{L_R}{I_R}=-\frac{L_\circ}{I_L}-\frac{R_\circ}{I_R}+6E\left[\frac{\delta_L}{L_L}-\delta_C\left(\frac{1}{L_L}+\frac{1}{L_R}\right)+\frac{\delta_R}{L_R}\right]$$

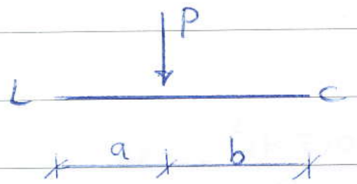
$\delta_L =$ نشست تکیه‌گاه چپ $\uparrow +$

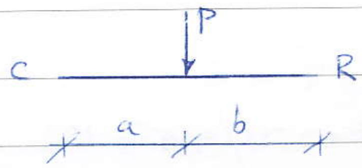
$\delta_C =$ نشست تکیه‌گاه وسط $\uparrow +$

$\delta_R =$ نشست تکیه‌گاه راست $\uparrow +$

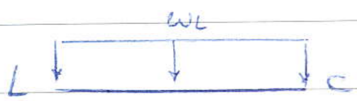
نشست‌های تکیه‌گاه‌ها جزئی (خیلی اندک) در تئوری تیرهای ... در نظر می‌گیریم

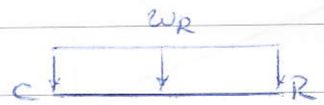
توابع بارگذاری L_0 و R_0 :





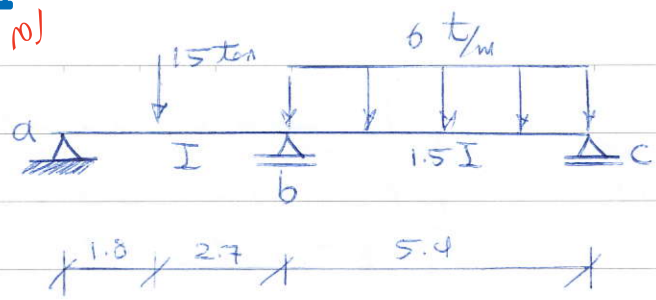
$$L_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L} \qquad R_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$$





$$L_0 = \frac{w_L L_L^3}{4} \qquad R_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$$

$$I_L = I_R \Rightarrow M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R =$$
$$- L_0 - R_0 + 6EI\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_C\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{R_L}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right]$$



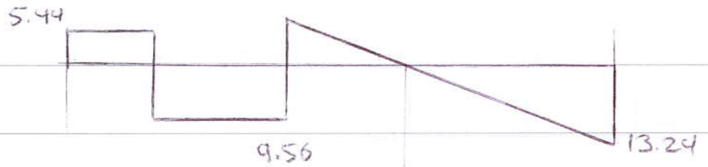
تیر سراسری مقابل ا درجه نامعین است. به تعداد درجات نامعین همواره باید معادله ۳ لنگری نوشت یعنی در این مسئله نوشتن ا معادله کفایت می‌کند

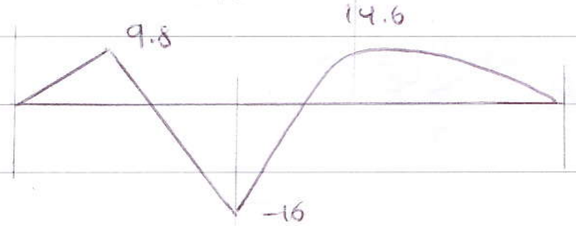
$M_a = 0 \qquad M_b = ? \qquad M_c = 0$

$\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$

$L_0 = (15 \times 1.8 \times 2.7 \times 6.3)/4.5 = 102 \qquad R_0 = \dfrac{6(5.4)^3}{4} = 236$

$0 + 2M_0\left(\dfrac{4.5}{I} + \dfrac{4.5}{1.5I}\right) + 0 = -\dfrac{102}{I} - \dfrac{236}{1.5I} \longrightarrow M_b = -16 \text{ ton.m}$

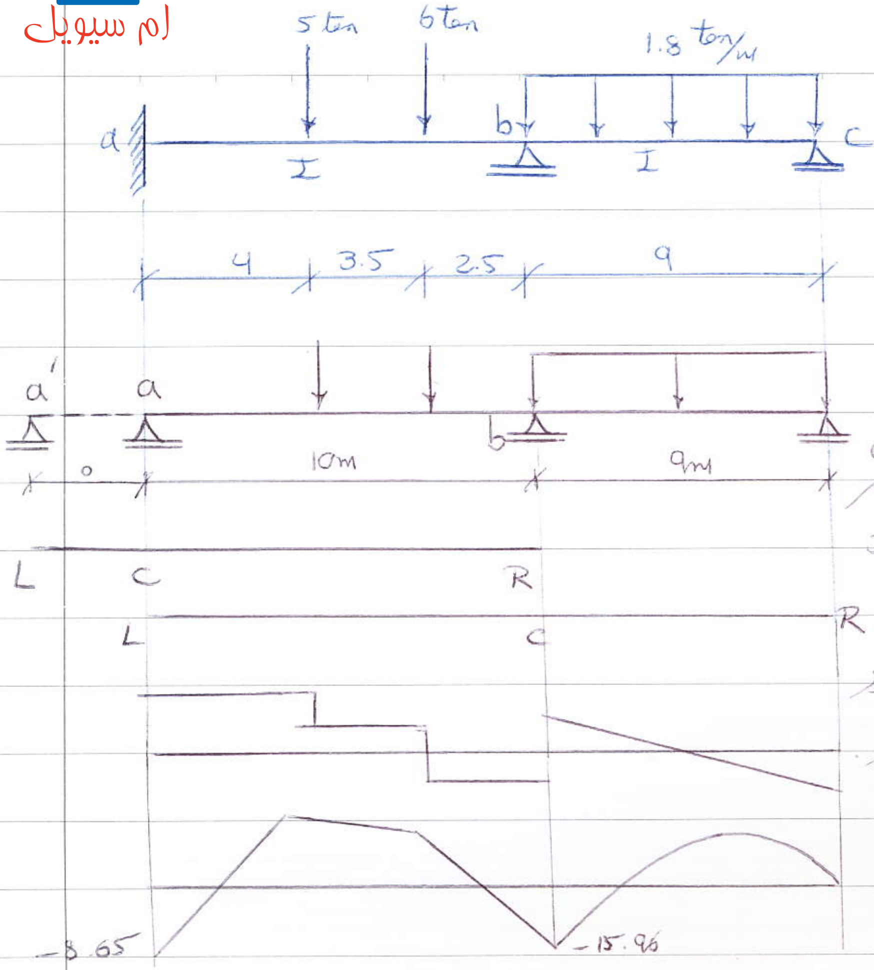




6.1 / 6.2 / 6.13 / 6.17 / 6.19

6.22 / 6.23 / 6.26 / 6.28 / 6.30 / 6.29 / 6.32 / 6.33 / 6.48 → تمرین حل شده

سراسری → 6.50 / 6.51 / 6.53 /



تیر سراسری نشان داده شده برای نیروهای قائم از نظر استاتیکی دو درجه نامعین می‌باشد. با انتخاب M_a و M_b به عنوان مجهولات اضافه نیاز به دو رابطه یعنی دو بار نوشتن معادله سه لنگری داریم. تکنیک حل تیرهای سراسری با تکیه‌گاه انتهایی گیردار بدین ترتیب است که تکیه‌گاه گیردار تبدیل به تکیه‌گاه ساده و دهانه‌ای به طول صفر به آن اضافه می‌شود تا تیر سراسری با تکیه‌گاه‌های ساده ایجاد شود.

$$\delta_{a'} = \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$$

(۱ a' a b

L C R

$$L_0 = 0 \qquad R_0 = \frac{5\times4\times6\times16}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times12.5}{10} = 332.6$$

$$M_{a'} = 0 \qquad 20M_a + 10M_b = -332.6$$

(۲ a b c

L C R

$$L_0 = \frac{5\times4\times6\times14}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times17.5}{10} = 364.9$$

$$R_0 = \frac{1.8\times9^3}{4} = 328$$

$$10M_a + 38M_b = -693 \iff \begin{cases} M_a = -8.65 \\ M_b = -15.96 \end{cases}$$

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای محمد سیفی (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر) و آقای مهدی زمانی (دانشجوی کارشناسی دانشگاه صنعتی امیرکبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

hamid_kazem041@yahoo.com